

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIA
Departamento de Física



**Influencia de la Constante Cosmológica Λ
en la Estructura de Estrellas densas**

Néstor Rodrigo Ahumada Ahumada

Profesor Guía:

Guillermo Octavio Palma Aguirre

Norman Francisco Cruz Marín

Trabajo de titulación para optar al
grado de Magíster en Ciencia

Santiago - Chile

2022

© Néstor Rodrigo Ahumada Ahumada.

Se autoriza la reproducción parcial o total de esta obra, con fines académicos, por cualquier forma, medio o procedimiento, siempre y cuando se incluya la cita bibliográfica del documento.

Dedicatoria

Agradecimientos

Tabla de Contenidos

Agradecimientos	III
Índice de Tablas	VI
Índice de Ilustraciones	VIII
Resumen	XIII
1. Introducción Estrellas Densas	1
1.1. Enanas Blancas	2
1.2. Estrellas de Neutrones	6
1.3. Constante Cosmológica Λ	9
2. Ecuaciones Estructura Estelar	12
2.1. Modelo clásico	12
2.2. Modelo con correcciones de Relatividad General	15
2.3. Ecuación de estado politrópica	20
2.3.1. Enanas blancas, modelo de gas de Fermi de electrones	20
3. Tratamiento Numérico	26

<i>TABLA DE CONTENIDOS</i>	v
4. Algoritmos Eficientes de Solución Numérica	30
4.1. Runge-Kutta	30
4.2. Método de Bulirsch-Stoer	32
4.3. Contraste	34
5. Análisis de Resultados	36
5.1. Modelo Clásico Newtoniano	36
5.2. Modelo en Relatividad General -TOV	45
5.2.1. Enanas Blancas	45
5.2.2. Estrellas de Neutrones	49
5.3. Modelo en relatividad general con constante cosmológica Λ	58
5.3.1. Λ como oposición a la presión	58
6. Conclusiones	78
Referencias	80

Índice de Tablas

4.1. Comparativa rutinas RK-BS bajo régimen de presiones estelares relativistas, de valor central $P_0 = 10^{27} \frac{Kg}{Km*s^2}$	35
5.1. Radios R (<i>km</i>) y masa M (M_\odot) para enanas blancas en régimen no relativista	37
5.2. Radios R (km) y masa M (M_\odot) para enanas blancas en régimen relativista con modelo clásico de Newton	39
5.3. Radios R (km) y masa M (M_\odot) para estrellas de neutrones en régimen no relativista con modelo clásico de Newton	41
5.4. Radios R (km) y masa M (M_\odot) para estrellas de neutrones régimen mixto ajustado con modelo Newtoniano	42
5.5. Radios R (km) y masas M (M_\odot) para enanas blancas en régimen no relativista con modelo en relatividad general con ecuación de <i>TOV</i>	45
5.6. Radios R (km) y masas M (M_\odot) para enanas blancas en régimen no relativista con modelo en relatividad general con ecuación de <i>TOV</i>	47
5.7. Radios R (km) y masa M (M_\odot) para estrellas de neutrones en régimen no relativista con modelo en relatividad general con ecuación de <i>TOV</i>	50
5.8. Radios R (km) y masa M (M_\odot) para estrellas de neutrones en régimen relativista con modelo en relatividad general con ecuación de <i>TOV</i>	52

5.9. Radios R (km) y masa M (M_{\odot}) para estrellas de neutrones en régimen mixto ajustado
con modelo en relatividad general con ecuación de *TOV* 54

Índice de Ilustraciones

2.1. Diagrama cascarón diferencial de masa en estrella	13
2.2. Diagrama diferencial de volumen y las diferencias de presión experimentadas	14
5.1. Masa enana blanca $\bar{m}(r)$ en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$, en régimen no relativista con ecuación de clásica de Newton.	37
5.2. Presión enana blanca $\bar{p}(r)$ en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$, en régimen no relativista con ecuación de clásica de Newton.	38
5.3. Masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen relativista con modelo clásico de Newton.	39
5.4. Presión $\bar{p}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen relativista con modelo clásico de Newton.	40
5.5. Masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen no relativista con modelo clásico de Newton.	41
5.6. Presión $\bar{p}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen no relativista con modelo clásico de Newton.	42
5.7. Masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen mixto ajustado con modelo clásico de Newton.	43

5.8. Presión $\bar{p}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen mixto ajustado con modelo clásico de Newton.	43
5.9. Masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen no relativista con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	46
5.10. Presión $\bar{p}(r)$ (<i>estandarizada</i>) enana blanca en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen no relativista con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	46
5.11. Contraste Masa $\bar{m}(r)$ y presión $\bar{p}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para presión central $\bar{p}(0) = 1,065 \times 10^{-15}$ en régimen no relativista con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	47
5.12. Masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen relativista con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	48
5.13. Presión $\bar{p}(r)$ (<i>estandarizada</i>) enana blanca en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen relativista con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	48
5.14. Contraste Masa $\bar{m}(r)$ y presión $\bar{p}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para presión central $\bar{p}(0) = 1,104 \times 10^{-15}$ en régimen relativista con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	49
5.15. Masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen no relativista con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	50
5.16. Presión $\bar{p}(r)$ (<i>estandarizada</i>) estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen no relativista con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	51

5.17. Contraste Masa $\bar{m}(r)$ y presión $\bar{p}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para presión central $\bar{p}(0) = 1,104 \times 10^{-15}$ en régimen no relativista con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	51
5.18. Masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen relativista con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	53
5.19. Presión $\bar{p}(r)$ (<i>estandarizada</i>) estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen relativista con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	53
5.20. Contraste Masa $\bar{m}(r)$ y presión $\bar{p}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para presión central $\bar{p}(0) = 10^{-1}$ en régimen relativista con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	54
5.21. Masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen mixto ajustado con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	55
5.22. Presión $\bar{p}(r)$ (<i>estandarizada</i>) estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen mixto ajustado con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	55
5.23. Contraste Masa $\bar{m}(r)$ y presión $\bar{p}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para presión central $\bar{p}(0) = 7,5 \times 10^{-2}$ en régimen mixto ajustado con modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i>	56
5.24. Masa $\bar{m}(r)$ y presión $\bar{p}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para presión central $\bar{p}(0) = 3 \times 10^{-2}$ en régimen mixto ajustado contrastando modelo en relatividad con ecuación de <i>TOV</i> y ecuación de <i>Newton</i>	56
5.25. Contraste masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 10^{23}$ en régimen no relativista contrastando con constante cosmológica Λ	59

5.26. Contraste masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 10^{26}$ en régimen relativista contrastando con constante cosmológica Λ . 59

5.27. Contraste masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 10^{28}$ en régimen no relativista contrastando con constante cosmológica Λ 60

5.28. Contraste masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 10^{41}$ en régimen relativista contrastando con constante cosmológica Λ 61

5.29. Contraste masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 10^{45}; p(0) = 10^{37}; p(0) = 10^{34}; p(0) = 10^{29}$ en régimen relativista ajustado contrastando con variaciones de valores de constante cosmológica Λ 66

5.30. Contraste masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 2,65 \times 10^{25}$ en régimen no relativista contrastando con variaciones de valores de constante cosmológica Λ 67

5.31. Contraste masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 0,822 \times 10^{28}$ en régimen relativista contrastando con variaciones de valores de constante cosmológica Λ 68

5.32. Contraste masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 0,822 \times 10^{28}$ en régimen relativista contrastando con variaciones de valores de constante cosmológica Λ 69

5.33. Compactificación (ζ) de enana blanca en función de la variación de valores de constante cosmológica Λ , para presión central $p(0) \sim 10^{23}$ en régimen no relativista . . . 70

5.34. Contraste compactificación (ζ) de estrella de neutrones en función de la variaciones de valores de constante cosmológica Λ , relativista ajustado 71

5.35. Contraste masas finales ($\bar{m}(R)$) de estrella de neutrones en función de las variaciones de presión central inicial con constante cosmológica variada $\Lambda \sim 10^{-4}$ 72

5.36. Contraste compactificación (ζ) de estrella de neutrones en función de las variaciones de presión central inicial con constante cosmológica variada $\Lambda \sim 10^{-4}$ 73

5.37. Contraste compactificación (ζ) y masa (M_{\odot}) de estrella de neutrones en función de las variaciones de presión central inicial 74

5.38. Contraste radio final (R) de estrella de neutrones en función de las variaciones de presión central inicial con constante cosmológica variada $\Lambda \sim 10^{-4}$ 75

5.39. Contraste masa total ($\bar{m}(R)$ contra radio final (R) de estrella de neutrones en función de las variaciones de presión central inicial con constante cosmológica variada $\Lambda \sim 10^{-4}$ 76

5.40. Ajuste masa final ($\bar{m}(R)$) y compactificación (ζ) de estrellas de neutrones en función de las variaciones de presión central inicial 77

Resumen

La motivación para incorporar la constante cosmológica en el presente trabajo se debe a que ésta es un ingrediente esencial del muy conocido modelo estándar de Cosmología, denominado Λ CDM, el cual hasta ahora es el que mejor ha logrado explicar la transición del proceso de expansión del universo desde una fase en desaceleración a otra acelerada, como también es el que mejor se ajusta a la abundancia observada de helio (incluido Deuterio), hidrógeno y litio, así como al por qué de la existencia de un fondo cósmico de microondas [1], lo cual es confirmado por la gran cantidad de datos observacionales existentes[2].

Los efectos enunciados anteriormente son de escalas cósmicas de Gigaparsecs, en la cual se pueden evidenciar los efectos de Λ , sin embargo, una de las razones para estudiar la inclusión de la constante cosmológica en estructuras pequeñas como estrellas de neutrones y enanas blancas fue la evidencia encontrada del rol y efectos que ésta juega en la órbitas y estabilidad de sistemas acoplados (Órbita circular estable más interna y más externa) [3], los cuales son nimios comparados con las estructuras donde habitualmente se estudian los efectos de Λ .

Dado que las ecuaciones de equilibrio para los diferentes tipo de estrella, en particular las de este estudio dependen de la constante cosmológica, es de interés incluirla en un estudio dinámico que permita conocer el comportamiento de sus soluciones considerando la imposibilidad actual de obtener un resultado analítico para su solución. Debido a la interacción que tiene ésta con las variables de las ecuaciones, era de esperar un efecto de contraposición con la presión interna de la estrella, generando una disminución en los radios de ellas, sin embargo, los resultados obtenidos al solucionar de manera numérica los sistemas se puede observar un efecto mas bien despreciable, salvo cuando se utilizan valores considerablemente mayores con respecto al valor registrado experimentalmente.

Capítulo 1

Introducción Estrellas Densas

Como se indica en [4] una parte importante de las estrellas son capaces de soportar los colapsos gravitacionales generados por sus grandes masas debido a la presión que se genera en su interior por medio de procesos de reacción nuclear que, como planteó Arthur Eddington [5] por primera vez en 1920, se debe a la fusión de núcleos de Hidrógeno y Helio, liberando en este proceso energía la cuál se encarga de equilibrar las fuerzas gravitacionales presentes. Como es de esperar, estas reacciones no se pueden mantener indefinidamente y el combustible nuclear (Helio e Hidrógeno principalmente) al ser consumido casi en su totalidad vuelve virtualmente imposible, con la tasa de generación de energía disponible, soportar el inminente colapso generado la atracción gravitacional generado por la propia masa de la estrella, decantando esto en dos posibles estados finales de existencia de estos sistemas gravitacionales.

El primero de estos escenarios posibles es en el cual la gravedad se vuelve dominante llevando inexorablemente a aquella estrella que supere aproximadamente las 2 masas solares (M_{\odot}) a colapsar en un agujero negro, una estructura cuyo interior al horizonte de sucesos no tiene posibilidad de enviar información hacia un observador exterior.

El segundo de estos posibles finales para una estrella en fase principal se da cuando la fuerza

ejercida por gravedad es equilibrada desde el interior por presión generada a partir de procesos no termonucleares, más bien de carácter cuántico, pudiendo en este camino finalizar su vida como una enana blanca, o una estrella de neutrones, cuerpos estelares de altas densidades que presentan particularidades que veremos a continuación.

1.1. Enanas Blancas

Como se puede leer en el trabajo de Koester y Chanmugam [6] el estudio de las Enanas Blancas tiene gran relevancia en las áreas de la física relacionadas al universo, ya que estas contienen información de sustancial que sirve para entender la evolución individual de estrellas desde su origen a su decadencia, en la historia de las galaxias, así como la tasa de formación de estrellas en ellas. Esto entre otras cosas debido a que la vasta mayoría de las estrellas, incluido nuestro Sol, pasarán la fase final de su existencia en forma de Enana Blanca [7].

La característica principal que define el destino de una estrella ordinaria es su masa a lo largo de su vida, ya que aquellas que han consumido su combustible termonuclear y que presentan masas críticas del orden de $M \sim 6 - 8 M_{\odot}$ (la cual pueden perder por diversos medios en su proceso de enfriamiento), terminarán su vida como Enana Blanca, las cuales presentan masas máximas del orden de $M_{max} \sim 1,4M_{\odot}$, con radios aproximados del orden terrestre y densidades por tanto cercanas a $10^3 \text{ kg} * \text{cm}^{-3}$. Estas diferencias entre las masas entre las fases principal y final es aprovechada en la galaxia para la formación de nuevos cuerpos celestes en ellas. Desde su nacimiento y durante sus fases tempranas presentan altos valores de Luminosidad ($L := \text{energía radiante perdida por segundo}$), la cual perderán de forma gradual hasta volverse virtualmente invisibles a lo largo de un periodo de $5 - 10 \text{ billones de años}$. Son estos largos periodos de tiempo que demoran en perder su luz, los que permiten al estudiarlas leer en ellas la información que contienen de las etapas primarias de nuestra galaxia.

Como se planteó previamente, en las Enanas Blancas dejaron de resistir la fuerza de la gravitación mediante presión generada por energía nuclear de fusión de núcleos, y debido a sus densidades extremadamente altas los espacios que pueden ocupar los átomos generan degeneración de electrones

como consecuencia del principio de exclusión de Pauli. El peso de la estrella es soportado por lo que se denomina presión de degeneración electrónica, caracterizada por una determinada ecuación de estado que permitirá evaluar las masas límites para este tipo de estrellas.

Otra característica interesante de las Enanas Blancas es que se pueden encontrar algunas de ellas como poseedoras de campos magnéticos. Se conocían hasta hace algunos años cerca de 42 de estos cuerpos con campos que oscilaban en rangos de $10^6 - 10^9 G$ [8], lo cual suma otra razón de estudio al evidenciar en ellos los efectos de fuertes campos magnéticos que pueden ser observados en gran detalle en todo el espectro, desde el Infrarrojo hasta el Ultravioleta.

Desde observaciones astronómicas de los espectros de luz emitidos de las atmósferas de las Enanas Blancas se pudo encontrar un patrón de amplia variación en los componentes principales de estas a diferencias de otros grupos estelares que presentan espectrometrías similares entre ellos. Se pueden encontrar estrellas que presentan líneas de hidrógeno, las cuales se visualizan extremadamente ensanchadas con respecto a las originales por causa de los poderosos campos gravitacionales presentes en ellas. En algunas de estas enanas blancas es posible encontrar únicamente líneas En el espectro del helio neutro o simplemente líneas que se encuentran en los rangos de las bandas de Swan para moléculas de Carbono número 2, se han visualizados otras cuyas líneas sólo contienen calcio, magnesio o hierro.

Como es de esperar por ser los componentes principales del universo, la mayoría de las Enanas Blancas presentan en sus capas exteriores principalmente helio e hidrógeno, tal como lo muestra y explica el porque de esta situación D. Koester en su publicación [9], se debería a que si se combinan las influencias debidas a los campos tanto eléctricos como gravitacionales en las capas exteriores de estas estrellas. Se genera separación entre los elementos que presentan diversos pesos atómicos, creando un efecto de lluvia de aquellos que son más pesados hacia el centro de la estrella y un ascenso de los más livianos en dirección del tope atmosférico. Estos procesos se presentan en intervalos de tiempos muy cortos contrastándolos con los tiempos estelares.

Por todas las razones previamente expuestas y debido a nuestra imposibilidad material para recrear y/o simular con precisión en la tierra todas estas condiciones de la materia que se dan de

forma natural en las Enanas Blancas, es por lo cual tras el desarrollo teórico de los marcos que se cree rigen dichas condiciones, así como su grado de predicción con respecto a la realidad, lo cual puede ser confirmado por medio de la observación astronómica de nuestros cuerpos celestes de estudio, es que las Enanas Blancas se podrían considerar como enormes laboratorios físicos extra-terrestres en el aprendizaje de materias de altas densidades y extremas presiones. Esta es una de las razones que motivan este trabajo.

A través de sus constantes observaciones del espacio el matemático y astrónomo *F. Bessel*, las cuales realizó durante los años 1834 y 1844, se percató de desviaciones en el tránsito de la estrella Sirius, la cuál presentaba oscilaciones aparentes en su recorrido por el firmamento, lo cual sólo lograba ser explicado y posteriormente confirmado, por la presencia de una estrella compañera, la cual pasó a llamarse Sirius B. La detección tuvo lugar en el año 1861 de forma visual gracias al telescopio americano armado por el fabricante de telescopios y astrónomo *A. Graham*, con lo cuál fue viable determinar por primera vez su órbita. Años después, cerca del año 1910, el astrónomo *L. Boss*, quien construyó uno de los primeros catálogos de compilación de estrellas, fue capaz de hacer una de las primeras estimaciones de la masa de esta Enana Blanca en un valor de $0,94M_{\odot}$, la que lamentablemente, pero sin pérdida del valor de esas mediciones, fue nuevamente determinada en 1978 aumentando a $1,053M_{\odot}$.

Utilizando técnicas de espectrometría astronómica fue posible estimar su temperatura efectiva atmosférica en alrededor de $8000K$, valor que junto a los valores conocidos de su luminosidad hizo posible las primeras estimaciones de su radio y por consiguiente de su densidad, la cual se considera alrededor de $50 \text{ kg} * \text{cm}^{-3}$. Estos valores que, pese a estar por debajo de futuras estimaciones, para la época y lo que se conocía en aquellos momentos, era en palabras del mismo Eddington (1926) un absurdo, sin embargo gracias a las nuevas tecnologías en observación y mejores cálculos, ha permitido estimar su temperatura superficial en aproximadamente $27000K$ y a partir de ello, una densidad de $3 \times 10^3 \text{ kg} * \text{cm}^{-3}$.

Como se ha comentado previamente, las Enanas Blancas no fueron capaces de soportar la fuerza gravitacional generada por su propia masa, generando un primer colapso que la lleva a su

estructura actual. En este escenario se producen densidades extremadamente altas que dan lugar a materia en un estado llamado degeneración de electrones, se considera que la composición interior debido a este estado es de carbono puro, bajo este régimen se puede calcular la distancia típica r_c entre los núcleos del carbono (*distancia que si se considera en un enlace simple de carbono es de $1,54 \times 10^{-10}m$ y en caso de enlaces triples $1,2 \times 10^{-10}m$*) a partir de la fórmula, $\frac{4\pi}{3}n_c r^3 = 1$, donde n_c es la densidad de numero de las partículas pesadas para este caso. El valor obtenido previamente es aproximadamente $r_c = 1,2 \times 10^{-10}cm$, lo cual es muchísimo menor al radio de Bohr ($5,3 \times 10^{-9}cm$, *la cual se define como la distancia esperada entre el núcleo de de un átomo y su primer electrón en estado base*) incluso para iones de carbono que cuentan con tan sólo con un electrón.

Bajo este régimen sólo puede mantenerse en la Enana Blanca la materia por la falta de espacio en ella no permite orbitas ligadas y debería presentarse completamente como presión ionizada (*Materia que registra una mayor interacción con la luz*). En este mismo contexto se presenta una distancia media entre los electrones del orden de $r_e \sim 6,4 \times 10^{-11}cm$, valor que es considerablemente menor que la longitud de onda térmica de Broglie para los electrones inclusive para la temperaturas extremadamente altas ($T > 10^9 K$), lo cual vuelve imposible hacer una descripción adecuada de las condiciones termodinámicas de la materia, lo que vuelve imprescindible el uso de mecánica cuántica para tener un panorama de mayor realismo frente a esta situación. Al utilizar la característica de la obediencia de los electrones a la estadística de Fermi-Dirac es posible explicar el porqué y el cómo la Enana Blanca es capaz de soportar la gravedad completamente gracias a la presión de degeneración de electrones, este régimen que no necesita de reacciones termonucleares para mantener la masa de la estrella puede incluso seguir su trabajo a temperatura cero, lo cual explica la razón del enfriamiento de estas en el tiempo, gracias a esta última característica las Enanas Blancas en este estado estable se vuelven nuevamente un laboratorio espacial para el estudio de configuraciones a temperatura cero, acrecentando la necesidad del estudio de estos cuerpos estelares.

1.2. Estrellas de Neutrones

Como resume muy bien el libro de Haensel [10] las estrellas de neutrones son cuerpos estelares, remanentes de estrellas que finalizaron su fase principal, y por ende ya no cuentan con energía termonuclear que consumir para contrarrestar la atracción gravitacional de su propio peso y evitan el colapso gravitacional mediante la presión de degeneración de neutrones, por lo cual la materia que contienen en su interior se encuentran en densidades que están apenas por encima de la que tiene un núcleo atómico, del orden medio de $\sim 7 \times 10^{14} \text{ g} * \text{cm}^{-3} \simeq (2 - 3)\rho_0$ (*comparado con la densidad nuclear normal, $\rho_0 = 2,8 \times 10^{14} \text{ g} * \text{cm}^{-3}$*). Si bien sus masas en términos generales no difieren mucho de las que presentan las Enanas blancas, del orden de $1,4M_{\odot}$, presentan una característica particular en lo que refiere a sus radios, los cuales son aproximadamente de apenas unos 10 km , haciendo de estos cuerpos celestes las estrellas más compactas conocidas en el universo, presentando energías gravitacionales similares a $E_{grav} \sim 0,2M_{\odot}c^2$ y una aceleración gravitacional superficial aproximada de $g \sim 2 \times 10^{14} \text{ cm} * \text{s}^{-2}$.

Un hecho interesante es la diferencia de años entre las primeras predicciones de las Estrellas de Neutrones y su primer avistamiento. En primera instancia, en el año 1932 Lev Landau [11], de forma independiente a Chandrasekhar, aunque un tiempo después, logró estimar la masa máxima de un Enana Blanca con bastante precisión. Sin embargo aquella publicación contenía una segunda parte bastante interesante, en ella Landau especulaba la existencia de cuerpos estelares que podrían existir de manera estable con densidades cercanas a las del núcleo atómico, siendo aún más compactas que las Enanas Blancas estudiadas en su investigación.

Pese a esta especulación de Landau, la predicción teórica que hoy en día sentó las bases de nuestro conocimiento y estudio de las Estrellas de Neutrones, fue realizado por W. Baade y F. Zwicky [12], quienes hasta el año 1933 estuvieron estudiando diversas observaciones de explosiones de supernovas y en ellas encontraron que de ellas se liberaba una cantidad colosal de energía que inicialmente no tenía una explicación clara, para la cual ellos propusieron, de sus propias palabras, lo siguiente: *Con todas las reservas de nuestros avances hemos observado que la supernova representa la transición desde estrellas ordinarias a estrellas de neutrones, que en sus etapas finales consiste de paquetes de neutrones extremadamente cercanos.* Sobre este proceso de transición entre estrellas, especularon una posible razón, que consideraba que en la corteza externa de una estrella ordinaria

se producen los neutrones, que debido a su masa generan una suerte de lluvia desde la superficie en dirección radial hacia el centro de ésta, bajo la premisa que la presión de luz es prácticamente cero sobre los neutrones.

Dentro de los campos de investigación principales en torno a las estrellas de neutrones, se encuentra uno de sus ingredientes fundamentales que particularmente tuvo un auge de estudio previo a la segunda guerra mundial, éste es conocer la ecuación de estado que describe a la materia presente en nuestro objeto de estudio, la cual se encuentra a densidades irreplicables en nuestro planeta. El desarrollo de la teoría que permite la obtención de la ecuación de estado buscada considera el hecho de que las estrellas de neutrones, por estabilidad de los neutrones (*Si estos no se encuentran dentro de un núcleo atómico, acompañados de protones, presentan una vida media de alrededor de 15 minutos*) estén compuestas además por protones y electrones, estos últimos necesarios para mantener la nulidad de carga de las estrellas de neutrones. Estos fermiones se encuentran en estado degenerado para poder mantener la estabilidad de la estrella con respecto al colapso gravitacional, siendo esto la razón de que sea viable considerar que la materia en estos cuerpos estelares se pueda considerar sin mayores problemas a temperatura $T = 0K$ sin presentar grandes desviaciones de del estado real, además de entregar gran información del comportamiento de ellas.

Hubo ideas poco afortunadas como la de Landau [13] y Gamow [14], quienes de forma independiente propusieron que existía la posibilidad de que prácticamente cualquier estrella regular podría contener un núcleo que no difiere de la concepción que se tenía de lo que es una estrella de neutrones. Claramente esta idea, que buscaba explicar las cantidades de energía estelar, fue descartada conforme avanzaron los estudios.

Es a partir de el punto que se verá ahora que el entendimiento de las estrellas de neutrones comienza un camino de crecimiento, esto gracias al trabajo de Tolman[15], y Oppenheimer con Volkoff [16], quienes a partir de la ecuación de campo de Einstein [17] fueron capaces de derivar, gracias a la simetría esférica de los cuerpos de estudio, una ecuación de equilibrio hidrostático para las estrellas de neutrones en el marco de las relatividad general. En esta ecuación se reflejan las características fundamentales que se presentan en estas estrellas, tales como su densidad variable, el aporte de su energía en reposo y por supuesto los efectos surgidos a partir de la relatividad ge-

neral, todos ellos de gran importancia debido al régimen en el cual mantienen su estabilidad (*estas ecuaciones se verán con detalle en la próxima sección*).

Con la poderosa herramienta que fue esta ecuación Oppenheimer y Volkoff y considerando la estrella de neutrones como compuesta únicamente de un gas de neutrones fuertemente degenerados no interactuantes, se generó un modelo simple de para la ecuación de estado, el cual resolvieron de forma numérica obteniendo una respuesta para uno de los problemas más importantes: el límite de masas de estrellas de neutrones, las cuales, según sus resultados, para modelos estables y estáticos, presentan masas máximas (*para el equilibrio gravitacional*) del orden de $M_{ENmax} \simeq 0,71M_{\odot}$, que en la literatura se suele encontrar como el límite de Oppenheimer Volkoff. Claramente este valor generó grandes preocupaciones en los investigadores ya que se encontraba bastante por debajo del límite encontrado por Chandrasekhar para las enanas blancas, el cual como recordamos es del orden de $M_{EBmax} \simeq 1,44M_{\odot}$. Tras realizar las evidentes revisiones de sus procedimientos, premisas y resultados, sin poder evidenciar fuentes de errores, concluyeron de forma pesimista *"Hemos notado que nuestro límite cercano a $\sim 0,7M_{\odot}$ esta cerca de ser real"*. Afortunadamente en esta ocasión se encontraban errados. Gracias al arduo trabajo de observación realizado años después, que combinaron técnicas precisas de medición de estrellas de neutrones, junto a evidencias astrofísicas directas que entregaron datos de la fuerte interacción repulsiva en la materia de estos cuerpos, que se encuentran a densidades supranucleares, se calculó este límite en el rango de $\sim (1,25 - 1,44)M_{\odot}$, lo cual es mucho más cercano al límite establecido por Chandrasekhar.

Lamentablemente durante el periodo de la segunda guerra mundial los avances en estos campos de estudio se detuvieron en base al contexto histórico que se vivía, particularmente hasta cerca de 1960 las estrellas de neutrones fueron tratadas nada más que como el fruto de la imaginación de de algunos físicos teóricos, sin encontrar ninguna evidencia real de sus existencia, mermando los avances en su estudio y el desarrollo de su entendimiento. Sin embargo, hubo un grupo de científicos que se embarco en la búsqueda visual de ellas, lo que permitió que tras su descubrimiento los trabajos en torno a ellas fueran llamativos de investigar, dando luces del comportamiento interno de estos cuerpos de altas densidades hasta el día de hoy, con observaciones de sus efectos estelares y uno de las motivaciones presente en este trabajo.

1.3. Constante Cosmológica Λ

En el transcurso del año 1917 A. Einstein estudia y genera sus primeros modelos sobre el universo basándose en la teoría general de la relatividad, cuyas ecuaciones de campo pueden escribirse como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.3.1)$$

En esta época, previa a los descubrimientos de Hubble, Einstein pensaba que el universo era estático, con distribución uniforme de materia y con curvatura espacial positiva (esféricamente cerrado), para el cual con las ecuaciones (1.3.1) no daban una solución de este tipo. Fue así que tuvo la idea de introducir una constante que permitiera obtener soluciones estáticas y que fuera compatible con la exigencia de que el miembro izquierdo de la ecuación (1.3.1) tuviera una derivada covariante nula. Con esto la ecuación (1.3.1) tomó la forma más general dada por

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.3.2)$$

donde el término Λ paso a ser conocido como *Constante cosmológica*. Para la ecuación anterior cuando hay ausencia del factor de energía-momento $T_{\mu\nu} = 0$, lo cual corresponde al caso de un espacio sin materia, tenemos la solución $G_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$, donde el término derecho puede ser interpretado como un tensor de energía-momento correspondiente al vacío, y dado por

$$T_{\mu\nu}^{\Lambda} = -\frac{c^4}{8\pi G}\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.3.3)$$

En términos generales, tanto la materia como la radiación pueden ser descritos como fluidos caracterizados a través de su densidad de energía (*densidad de materia*) y presión. Es así que nuestro tensor de energía-momento del vacío $T_{\mu\nu}^{\Lambda}$ puede ser parametrizado mediante la "*densidad de energía del vacío*" ρ_{Λ} y la "*presión del vacío*" p_{Λ} , las cuales corresponden a

$$\rho_{\Lambda} = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G} > 0 \quad (1.3.4)$$

$$p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}c^2 < 0. \quad (1.3.5)$$

Si consideramos el universo estático planteado por Einstein, mediante las ecuaciones de Friedman con la inclusión de la constante cosmológica, obtenemos los siguientes términos en función de la presión y densidad de materia p_M , ρ_M y la presión y densidad de energía de vacío p_{Λ} y ρ_{Λ} ,

respectivamente, como

$$\frac{\dot{a}^2 + \kappa c^2 R_0^{-2}}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_M + \rho_\Lambda) \quad (1.3.6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{c^2} \left[(p_M + p_\Lambda) + \frac{1}{3} (\rho_M + \rho_\Lambda) c^2 \right]. \quad (1.3.7)$$

Si consideramos que la mayoría de la materia en nuestro universo (a tiempo presente) no es de carácter relativista, y que puede describirse muy bien por una presión nula, $p_M = 0$, junto con que $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{c^2} \left[(p_M + p_\Lambda) + \frac{1}{3} (\rho_M + \rho_\Lambda) c^2 \right] \\ &= -\frac{4\pi G}{c^2} \left[-\rho_\Lambda c^2 + \frac{1}{3} (\rho_M + \rho_\Lambda) c^2 \right] \\ &= -\frac{4\pi G}{3} [-2\rho_\Lambda + \rho_M]. \end{aligned}$$

Ya que inicialmente buscamos estudiar el universo estático propuesto, tenemos la restricción $\ddot{a} = 0$, y de esa manera obtenemos de la ecuación anterior, junto a la ecuación (1.3.4), el resultado

$$\rho_M = 2\rho_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{4\pi G}.$$

Considerando ahora la segunda condición de universo estático, asociada a la velocidad de expansión nula $\dot{a} = 0$, implica que el factor de escala a del universo se mantiene constante $a = a_0 = 1$, de modo que reemplazando los valores obtenidos anteriormente para ρ_M en (1.3.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\kappa c^2}{R_0^2} &= \frac{8\pi G}{3} (2\rho_\Lambda + \rho_\Lambda) \\ &= \frac{8\pi G}{3} 3\rho_\Lambda \\ &= 8\pi G \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G} \\ &= \Lambda c^2, \end{aligned}$$

donde se considera el parámetro de curvatura Gaussiana $\kappa = 1$ representa un universo esférico. De esa manera obtenemos que el radio de curvatura del universo es $R_0 = \Lambda^{-1/2}$, lo cual entrega directamente una relación entre la densidad de materia del universo y la cantidad de materia en él contenida. Esta identidad de la constante cosmológica con el tiempo fue reinterpretada como como la densidad de energía del espacio vacío, lo que hoy en día vislumbra una explicación desde

conceptos de mecánica cuántica, que en algunas ocasiones se relaciona o asocia con la idea de energía oscura.

En el año 1931, posterior a la confirmación de E. Hubble de la expansión del Universo, Einstein decide abandonar su idea de la utilización de la constante cosmológica, que en sus propias palabras fue "*the biggest blunder*" o "*el peor error*" de su carrera. Sin embargo, en las décadas posteriores la constante cosmológica fue discutida tanto desde el punto teórico como observacional, dado que su presencia permitía una descripción más adecuada de la formación de estructuras, así como de evaluaciones de la edad del universo en consonancia con las observaciones. A finales de la década de los 90, se pudo evidenciar el corrimiento al rojo observando supernovas lejanas descubriéndose así la expansión acelerada del universo, hecho que en la búsqueda de una explicación implicaría un efecto repulsivo del vacío, lo que vino a cimentar el hecho de que Λ era parte integral de las ecuaciones de campo de Einstein. Mediciones del fondo cósmico de microondas permiten estimar el valor $\Lambda = 1,1056 \times 10^{-46} km^2$ para esta constante.

Capítulo 2

Ecuaciones Estructura Estelar

En el siguiente capítulo se verán las ecuaciones que rigen los modelos estelares estudiados, comenzando con la ecuación sencilla de equilibrio hidrostático newtoniana, que define tanto la variación de la masa en un cuerpo a partir de su densidad de masa, junto con la variación de la presión en términos de la masa y su densidad, para continuar con la actualización de esta última gracias al trabajo conjunto de Tolman, Oppenheimer y Volkoff [15],[16] que desarrollaron la ecuación de TOV a partir de las ecuaciones de estructura de Einstein [17], y que incluyen la constante cosmológica [18]. La resolución de estas ecuaciones necesita de un ingrediente adicional que debe incluir una ecuación de estado que relacione la presión con la densidad de masa, que en este trabajo será la relación politrópica en términos de la composición del cuerpo de estudio.

2.1. Modelo clásico

Para comenzar se establecerá la ecuación diferencial que describe la variación de la masa en términos del radio, considerando la simetría rotacional del cuerpo como premisa, así consideramos la densidad de masa de la estrella como función solamente dependiente de la distancia radial $r :=$ *distancia radial desde el centro de la estrella*, como $\rho \equiv \rho(r)$, sea $M(r) :=$ *masa de la estrella a distancia r del centro*, y un cascarón de la estrella a distancia r como se ve en la figura (2.1), tenemos que el diferencial de masa de este cascarón, está relacionado con el volumen diferencial

(compuesto por el diferencial de distancia y el área superficial $A(r)$) de esta capa por la densidad a esta distancia radial, así obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned}
 dM(r) &= \rho(r)dV \\
 &= \rho(r)A(r)dr \\
 &= \rho(r)4\pi r^2 dr \\
 \frac{dM}{dr}(r) &= 4\pi r^2 \rho(r)
 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

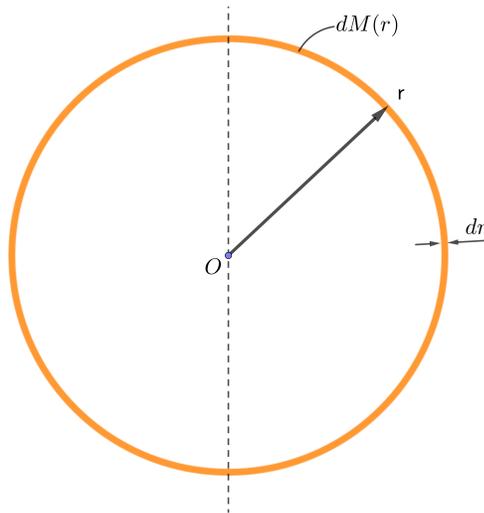


Figura 2.1: Diagrama cascarón diferencial de masa en estrella

Para continuar calculamos para un diferencial de volumen la diferencia de presión experimentada por este elemento como se ve en la figura , utilizando el hecho básico de su definición $P(r)*A = F(r)$, donde $P(r)$ representa la presión a una distancia r , A el elemento de área donde se experimenta la fuerza F , que en este caso es la gravitacional creada por Newton

$$F(r) = -\frac{GMm}{r^2} \tag{2.1.2}$$

donde M representa la masa de la estrella, en este caso hasta la distancia r desde el centro de ella y m la masa del elemento diferencial de volumen, que para efectos de nuestro cálculo se desarrolla en términos de la densidad de masa a esa distancia y el volumen expresado como el área del elemento

por el diferencial de distancia, así obtenemos, el diferencial de presión como

$$\begin{aligned}
 dP(r) * A &= dF(r) \\
 &= -\frac{GM(r)}{r^2} dm \\
 &= -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) dV \\
 &= -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r) A dr \\
 \frac{dP}{dr}(r) &= -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}
 \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

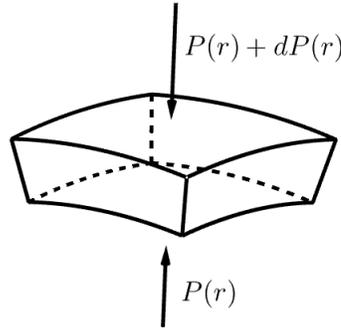


Figura 2.2: Diagrama diferencial de volumen y las diferencias de presión experimentadas

para efectos del tratamiento de las ecuaciones, se realizará una pequeña actualización de éstas para partículas que no son de carácter relativista (que obedecen las leyes de Newton, velocidades muy por debajo de c), utilizando la famosa relación obtenida por Einstein de energía en reposo para este régimen, las densidades de energía toman la forma $\epsilon(r) = \sqrt{(\rho(r)c^2)^2 + (\rho(r)vc)^2} \approx \rho(r)c^2$ y así las relaciones (2.1.1) y (2.1.3) se escriben como

$$\frac{dM}{dr}(r) = 4\pi \frac{r^2}{c^2} \epsilon(r) \tag{2.1.4}$$

$$\frac{dP}{dr}(r) = -\frac{GM(r)\epsilon(r)}{c^2 r^2} \tag{2.1.5}$$

Con este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas es posible tener una aproximación del comportamiento de las estrellas desde la perspectiva Newtoniana, lo cual será un buen primer

esbozo de sus parámetros, a la vez que servirá experimentalmente para ajustar los algoritmos de solución que se estudiarán en el capítulo (4).

2.2. Modelo con correcciones de Relatividad General

En 1939 gracias a los trabajos independientes de Tolman [15] y Oppenheimer junto con Volkoff [16], quienes a partir de la ecuación de campo de Einstein (2.2.1)

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.2.1)$$

en relatividad general [17] lograron encontrar una solución estática de dicha ecuación para un fluido con simetría esférica en equilibrio, con respecto a la métrica

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.2.2)$$

donde las funciones $\nu := \nu(r)$ y $\lambda := \lambda(r)$ son sólo dependientes de la distancia radial al centro de la esfera r . En las ecuaciones anteriores $G_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Einstein que es el aporte geométrico de esta relación, que se define a partir de $R_{\mu\nu}$ es el tensor de curvatura de Ricci, quien determina la curvatura de la variedad que en este caso es la 4-dimensional *espacio-tiempo*, el cual se define a partir de los símbolos de Christoffel de la siguiente manera con la convención de suma de Einstein

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha - \partial_\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \quad (2.2.3)$$

con

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2}g^{\gamma\lambda} \left(\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \right) \quad (2.2.4)$$

dentro de la ecuación (2.2.1) también se define el escalar de curvatura de Ricci como

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (2.2.5)$$

y el tensor de energía momento para un fluido isotrópico en un régimen libre de viscosidad, movimiento y conducción de calor se tiene como se expresa en [4]

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu} \quad (2.2.6)$$

donde p representa la presión del fluido, ρ su densidad y u_γ es su cuadrivelocidad.

Ya que la métrica sólo contiene sus componentes diagonales g_{tt} , g_{rr} , $g_{\theta\theta}$, $g_{\phi\phi}$ sucederá lo mismo con los tensores de Ricci, así al calcularlos obtenemos lo siguiente para cada uno

$$R_{tt} = -e^{\nu-\lambda} \left[\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\lambda'\nu'}{4} \right] \quad (2.2.7)$$

$$R_{rr} = \frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'^2}{4} - \frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda'\nu'}{4} \quad (2.2.8)$$

$$R_{\theta\theta} = -re^{-\lambda} \left[-\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} \right] - 1 + \frac{1}{r} \quad (2.2.9)$$

$$R_{\phi\phi} = -re^{-\lambda} \sin^2 \theta \left[-\frac{\nu'}{2} + \frac{\lambda'}{2} - \frac{1}{r} \right] - \sin^2 \theta \quad (2.2.10)$$

Utilizando las ecuaciones (2.2.7),(2.2.8),(2.2.9) y (2.2.10) podemos calcular el escalar de Ricci (2.2.5) obteniendo

$$R = -e^{-\lambda} \left[\nu'' + 2\frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2} + \frac{\nu'^2}{2} - 2\frac{\lambda'}{r} + \frac{2}{r^2} \right] + \frac{2}{r^2} \quad (2.2.11)$$

Calculando las componentes correspondientes del tensor de energía momento (2.2.6) y considerando en las ecuaciones de campo de Einstein (2.2.1) $G = c = 1$ obtenemos las siguientes relaciones para $T_{tt} = \rho e^\nu$ y $T_{rr} = pe^\lambda$

$$G_{tt} = -e^{\nu-\lambda} \left[\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right] - \frac{1}{r^2} \quad (2.2.12)$$

$$G_{rr} = - \left[\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] + e^\lambda \frac{1}{r^2} \quad (2.2.13)$$

y así tenemos el siguiente sistema para $G_{tt} = -8\pi T_{tt}$ y $G_{rr} = -8\pi T_{rr}$

$$-e^{-\lambda} \left[\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right] - \frac{1}{r^2} = -8\pi\rho \quad (2.2.14)$$

$$-e^{-\lambda} \left[\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] + \frac{1}{r^2} = -8\pi p \quad (2.2.15)$$

Ahora despejando ρ de la ecuación (2.2.14) y reemplazando en (2.1.1), e integrando con respecto

a la distancia radial al núcleo, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
M(r) &= 4\pi \int_0^r \rho(l)l^2 dl \\
&= 4\pi \int_0^r \frac{1}{8\pi} \left(e^{-\lambda} \left[\frac{\lambda'}{l} - \frac{1}{l^2} \right] + \frac{1}{l^2} \right) l^2 dl \\
&= \frac{1}{2} \int_0^r e^{-\lambda} [\lambda'(l)l - 1] + 1 dl \\
&= \frac{1}{2} \int_0^r e^{-\lambda} [\lambda'(l)l - 1] + 1 dl \\
&= \frac{1}{2} [-e^{-\lambda}l + l] \Big|_0^r \\
&= \frac{1}{2} [-e^{-\lambda}r + r] \\
2M(r) &= -e^{-\lambda}r + r \\
2M(r) - r &= -re^{-\lambda} \\
2\frac{M(r)}{r} - 1 &= -e^{-\lambda} \\
e^{-\lambda} &= 1 - 2\frac{M(r)}{r}
\end{aligned} \tag{2.2.16}$$

derivando esta expresión con respecto a la distancia radial, obtenemos

$$-\lambda'(r)e^{-\lambda} = -2\frac{M'(r)}{r} + 2\frac{M(r)}{r^2} \tag{2.2.17}$$

y ahora sumando las ecuaciones (2.2.15) y (2.2.14) obtenemos la relación

$$8\pi(\rho + p) = \frac{e^{-\lambda}\lambda'}{r} + e^{-\lambda}\frac{\nu'}{r} \tag{2.2.18}$$

reemplazando en ella la relación (2.2.17) y (2.2.16) obtenemos

$$\begin{aligned}
8\pi(\rho + p) &= \frac{1}{r} \left[2\frac{M'(r)}{r} - 2\frac{M(r)}{r^2} \right] + \left[1 - 2\frac{M(r)}{r} \right] \frac{\nu'}{r} \\
\left[1 - 2\frac{M(r)}{r} \right] \frac{\nu'}{r} &= 8\pi(\rho + p) - \frac{1}{r} \left[2\frac{M'(r)}{r} - 2\frac{M(r)}{r^2} \right] \\
\nu'(r) &= \left[8\pi(\rho + p)r - \frac{2}{r}M'(r) + 2\frac{M(r)}{r^2} \right] \left[1 - 2\frac{M(r)}{r} \right]^{-1}
\end{aligned}$$

reemplazando la ecuación (2.1.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
\nu'(r) &= \left[8\pi(\rho + p)r - \frac{2}{r}4\pi\rho r^2 + 2\frac{M(r)}{r^2} \right] \left[1 - 2\frac{M(r)}{r} \right]^{-1} \\
&= \left[8\pi pr + 2\frac{M(r)}{r^2} \right] \left[1 - 2\frac{M(r)}{r} \right]^{-1}
\end{aligned}$$

utilizando la ecuación de equilibrio hidrostático [16],

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{\nu'}{2} \quad (2.2.19)$$

y reemplazando en ella el resultado previo, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -\frac{1}{2} (\rho + p) \left[8\pi p r + 2 \frac{M(r)}{r^2} \right] \left[1 - 2 \frac{M(r)}{r} \right]^{-1} \\ &= -\frac{M}{r^2} (\rho + p) \left[1 + 4\pi \frac{p}{M} r^3 \right] \left[1 - 2 \frac{M(r)}{r} \right]^{-1} \end{aligned}$$

utilizando en esta ecuación la relación entre densidades de energía y de masa $\rho(r) = \epsilon(r)c^2$, con $c = 1$, obtenemos la ecuación de TOV [15], [16],

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{M}{r^2} (\epsilon + p) \left[1 + 4\pi \frac{p}{M} r^3 \right] \left[1 - 2 \frac{M(r)}{r} \right]^{-1} \quad (2.2.20)$$

En base a la evidencia de efectos en estructuras estelares considerablemente menores a galaxias [3] la inclusión de la constante cosmológica Λ en las ecuaciones de campo de Einstein (2.2.1) [15] con el fin de estudiar el comportamiento dinámico de estrellas densas podría entregar información importante de su formación y parámetros principales, así se obtiene

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.2.21)$$

esta inclusión genera cambios en las ecuaciones (2.2.15), (2.2.14), reescribiendo estas como

$$-e^{-\lambda} \left[\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right] - \frac{1}{r^2} + \Lambda = -8\pi\rho \quad (2.2.22)$$

$$-e^{-\lambda} \left[\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right] + \frac{1}{r^2} - \Lambda = -8\pi p \quad (2.2.23)$$

al igual que en el tratamiento clásico, despejando la densidad de masa e integrando este término, se obtiene

$$\begin{aligned} M(r) &= 4\pi \int_0^r \frac{1}{8\pi} \left(e^{-\lambda} \left[\frac{\lambda'}{l} - \frac{1}{l^2} \right] + \frac{1}{l^2} - \Lambda \right) l^2 dl \\ &= \frac{1}{2} \left[-e^{-\lambda} l + l - \Lambda \frac{l^3}{3} \right]_0^r \\ 2M(r) &= -e^{-\lambda} r + r - \Lambda \frac{r^3}{3} \\ 2M(r) - r + \Lambda \frac{r^3}{3} &= -r e^{-\lambda} \\ 2 \frac{M(r)}{r} - 1 + \Lambda \frac{r^2}{3} &= -e^{-\lambda} \end{aligned}$$

así la ecuación se escribe

$$e^{-\lambda} = 1 - 2\frac{M(r)}{r} - \Lambda\frac{r^2}{3} \quad (2.2.24)$$

derivando

$$-\lambda'e^{-\lambda} = -2\frac{M'(r)}{r} + 2\frac{M(r)}{r^2} - \Lambda\frac{2r}{3} \quad (2.2.25)$$

reemplazando estos términos en la suma de las ecuaciones (2.2.23),(2.2.22) (la cual se mantiene idéntica) se tiene la relación

$$\begin{aligned} 8\pi(\rho + p) &= \frac{1}{r} \left[2\frac{M'(r)}{r} - 2\frac{M(r)}{r^2} + \Lambda\frac{2r}{3} \right] + \left[1 - 2\frac{M(r)}{r} - \Lambda\frac{r^2}{3} \right] \frac{\nu'}{r} \\ \left[1 - 2\frac{M(r)}{r} - \Lambda\frac{r^2}{3} \right] \frac{\nu'}{r} &= 8\pi(\rho + p) - \frac{1}{r} \left[2\frac{M'(r)}{r} - 2\frac{M(r)}{r^2} + \Lambda\frac{2r}{3} \right] \\ \nu'(r) &= \left[8\pi(\rho + p)r - \frac{2}{r}M'(r) + 2\frac{M(r)}{r^2} + \Lambda\frac{2r}{3} \right] \left[1 - 2\frac{M(r)}{r} - \Lambda\frac{r^2}{3} \right]^{-1} \\ &= \left[8\pi(\rho + p)r - \frac{2}{r}4\pi\rho r^2 + 2\frac{M(r)}{r^2} + \Lambda\frac{2r}{3} \right] \left[1 - 2\frac{M(r)}{r} - \Lambda\frac{r^2}{3} \right]^{-1} \\ &= \left[8\pi pr + 2\frac{M(r)}{r^2} + \Lambda\frac{2r}{3} \right] \left[1 - 2\frac{M(r)}{r} - \Lambda\frac{r^2}{3} \right]^{-1} \end{aligned}$$

finalmente utilizando la ecuación de equilibrio hidrostático (2.2.19) y reemplazando el valor de ν' se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -\frac{1}{2}(\rho + p) \left[8\pi pr + 2\frac{M(r)}{r^2} + \Lambda\frac{2r}{3} \right] \left[1 - 2\frac{M(r)}{r} - \Lambda\frac{r^2}{3} \right]^{-1} \\ &= -\frac{M}{r^2}(\rho + p) \left[1 + 4\pi\frac{p}{M}r^3 + \Lambda\frac{r^3}{3M} \right] \left[1 - 2\frac{M(r)}{r} - \Lambda\frac{r^2}{3} \right]^{-1} \end{aligned}$$

y reemplazando la densidad de masa por densidad de energía se obtiene la ecuación de TOV con constante cosmológica.

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{M}{r^2}(\epsilon + p) \left[1 + 4\pi\frac{p}{M}r^3 + \Lambda\frac{r^3}{3M} \right] \left[1 - 2\frac{M(r)}{r} - \Lambda\frac{r^2}{3} \right]^{-1} \quad (2.2.26)$$

Como es posible evidenciar, Λ genera dos contribuciones, por un lado en un factor se presenta como contraposición a la presión de la estrella, de ahí que se hable de ella como una presión negativa o de vacío, además la solución de la ecuación de campo de Einstein también tiene una intervención

en el factor geométrico de esta ecuación, lo cual explicaría resultados posteriores en los cuales la inclusión de esta constante cosmológica incrementa los resultados de radio final de la estrella (gracias al factor del denominador se pueden obtener los radios de Schwarzschild para estrellas, de ahí el llamarlo geométrico).

2.3. Ecuación de estado politrópica

Ya que hasta ahora contamos con dos ecuaciones diferenciales (2.1.4) y (2.2.20), o según el caso de estudio (2.2.26), y son 3 las incógnitas involucradas, masa $M(r)$, presión $p(r)$ y densidad de energía $\epsilon(r)$ a distancia radial desde el centro de la estrella, tenemos un sistema con infinitas soluciones, por lo tanto es necesario encontrar una ecuación de estado que relacione, la presión con la densidad, y en este trabajo se buscará una ecuación de tipo politrópica $p(r) = K\epsilon(r)^\gamma$ donde γ es llamado número politrópico. Para encontrar dicha ecuación se estudiará la estructura interna de las estrellas analizadas y su composición.

2.3.1. Enanas blancas, modelo de gas de Fermi de electrones

Como se vio en (1.1) las enanas blancas evitan un colapso gravitacional gracias a la presión de degeneración de electrones, por lo tanto si se considera el número de estados disponibles dn en un volumen del espacio de fase de momentos en un intervalo de amplitud dk en un valor k , considerando el cascarón de superficie $4\pi k^2$ tenemos la relación

$$dn = \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{k^2 dk}{2\pi^2\hbar^3} \quad (2.3.1)$$

e integrando esta ecuación entre 0 y el momento de Fermi k_F asociado a la energía de Fermi para los electrones, que es el máximo nivel de energía que puede ocupar un estado cuántico como el que estamos analizando, además consideramos por las propiedades fermionicas del espín del electrón, que para cada nivel de energía admitido se admiten sólo dos estados, obtenemos la relación de

densidad de número

$$\begin{aligned}
 n &= 2 \int_0^{k_F} \frac{k^2 dk}{2\pi^2 \hbar^3} \\
 &= \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_F} k^2 dk \\
 n &= \frac{k_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}
 \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

En términos generales estas estrellas tienen carga eléctrica nula, se considera que por cada electrón hay un protón y por ende una cantidad asociada de neutrones, ya que estos últimos como nucleón (*par neutrón-protón*), tienen una masa muy por encima de la que posee el electrón ($m_e \ll m_N$), se asume que la densidad de masa de la estrella está generada principalmente por los nucleones de la forma

$$\rho = nm_N \frac{A}{Z} \tag{2.3.3}$$

donde n viene dado por la ecuación (2.3.2) y el valor $\frac{A}{Z}$ es el coeficiente que indica la cantidad de nucleones que existe por cada electrón, el cual varía según el elemento que conforma a la estrella (*en el caso de las enanas blancas, pueden estar formadas desde carbono y oxígeno, hasta hierro*) y reemplazando en este término la densidad de número previamente obtenida se expresa por

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{k_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} m_N \frac{A}{Z} \\
 k_F^3 &= \frac{3\pi^2 \hbar^3 \rho Z}{m_N A} \\
 k_F &= \hbar \left[\frac{3\pi^2 \rho Z}{m_N A} \right]^{\frac{1}{3}}
 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Ya que la energía para un nivel de momento del electrón viene dada por $E(k) = \sqrt{k^2 c^2 + m_e^2 c^4}$ para la densidad de número de estos estados, calculamos el aporte de la densidad de energía de los electrones en el espectro correspondiente entre el reposo relativo y el momento de Fermi k_F a la

enana blanca mediante

$$\begin{aligned}
\epsilon_{e^-}(k_F) &= \int_0^{n(k_F)} 2E(n(k_F))dn \\
&= \int_0^{k_F} 2\sqrt{k^2c^2 + m_e^2c^4} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi\hbar)^3} \\
&= \frac{1}{\pi^2\hbar^3} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2c^2 + m_e^2c^4} k^2 dk \quad \text{cambio } k = m_e c x : dk = m_e c dx : x_F = k_F / (m_e c) \\
&= \frac{1}{\pi^2\hbar^3} \int_0^{x_F} \sqrt{m_e^2 x^2 c^4 + m_e^2 c^4 (m_e c x)^2} m_e c dx \\
&= \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{x_F} \sqrt{x^2 + 1} x^2 dx \quad \text{cambio } x = \sinh(y) : dx = \cosh(y) dy : y_F = \sinh^{-1}(x_F) \\
&= \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{y_F} \sqrt{\sinh^2 y + 1} \sinh^2 y \cosh y dy \\
&= \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{y_F} \sinh^2 y \cosh^2 y dy \\
&= \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{y_F} \frac{\cosh 2y - 1}{2} \frac{\cosh 2y + 1}{2} dy \\
&= \frac{m_e^4 c^5}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^{y_F} \cosh^2 2y - 1 dy \\
&= \frac{m_e^4 c^5}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^{y_F} \frac{\cosh 4y + 1}{2} - 1 dy \\
&= \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \int_0^{y_F} \cosh 4y - 1 dy \\
&= \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \left[\frac{\sinh 4y}{4} - y \right]_0^{y_F} \\
&= \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \left[\frac{\sinh 4y}{4} - y \right]_0^{y_F} \\
&= \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} [\sinh y \cosh y (1 + 2 \sinh^2 y) - y]_0^{y_F} \\
&= \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} [\sinh(\sinh^{-1}(x_F)) \cosh(\sinh^{-1}(x_F)) (1 + 2 \sinh^2(\sinh^{-1}(x_F))) - \sinh^{-1}(x_F)] \\
\epsilon_{e^-}(k_F) &= \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \left[x_F \sqrt{1 + x_F^2} (1 + 2x_F^2) - \sinh^{-1}(x_F) \right] \tag{2.3.5}
\end{aligned}$$

de esta manera obtendremos la densidad de energía total de la estrella como

$$\epsilon_{EB} = nm_N c^2 \frac{A}{Z} + \epsilon_{e^-}(k_F)$$

sin embargo, el segundo factor es mucho menor que el primero, siendo éste el principal aporte. Ahora que tenemos esta relación es importante calcular la presión, y considerando que el momento

es $k = mv$ donde m es la masa y v la velocidad del objeto, y con la ecuación característica de Einstein podemos despejar la velocidad como $v = kc^2/E$, así con el hecho de que los electrones respetan la estadística de Fermi-Dirac, utilizamos el valor bajo ella de la presión de degeneración para un sistema isotrópico en el rango entre 0 y el momento de Fermi, de la forma

$$\begin{aligned}
p(k_F) &= \frac{1}{3} \int_0^{k_F} k v d n(k) \\
&= \frac{2}{3} \int_0^{k_F} k \frac{kc^2}{E(k)} \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi\hbar)^3} \\
&= \frac{8\pi c^2}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 c^2 + m_e^2 c^4}} dk \text{ cambio } k = m_e c x : dk = m_e c dx : x_F = k_F / (m_e c) \\
&= \frac{8\pi c^2}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{x_F} \frac{m_e^4 c^4 x^4}{\sqrt{m_e^2 c^4 x^2 + m_e^2 c^4}} m_e c dx \\
&= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{x_F} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad \text{cambio } x = \sinh(y) : dx = \cosh(y) dy : y_F = \sinh^{-1}(x_F) \\
&= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{y_F} \frac{\sinh^4(y)}{\sqrt{\sinh^2(y) + 1}} \cosh(y) dy \\
&= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{y_F} \sinh^4(y) dy \\
&= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{y_F} \left(\frac{\cosh^2 y - 1}{2} \right)^2 dy \\
&= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{12(2\pi\hbar)^3} \int_0^{y_F} \frac{\cosh(4y) + 1}{2} - 2 \cosh(2y) + 1 dy \\
&= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{24(2\pi\hbar)^3} \left[\frac{\sinh(4y)}{4} - 2 \sinh(2y) + 3y \right]_0^{y_F} \\
&= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{24(2\pi\hbar)^3} \left[\sinh y \sqrt{1 + \sinh^2 y} (1 + 2 \sinh^2 y) - 4 \sinh y \sqrt{1 + \sinh^2 y} + 3y \right]_0^{y_F} \\
&= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{24(2\pi\hbar)^3} \left[\sinh y \sqrt{1 + \sinh^2 y} (2 \sinh^2 y - 3) + 3y \right]_0^{y_F} \\
&= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{24(2\pi\hbar)^3} \left[\sinh \sinh^{-1}(x_F) \sqrt{1 + \sinh^2 \sinh^{-1}(x_F)} (2 \sinh^2 \sinh^{-1}(x_F) - 3) + 3 \sinh^{-1}(x_F) \right] \\
&= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{24(2\pi\hbar)^3} \left[x_F \sqrt{1 + x_F^2} (2x_F^2 - 3) + 3 \sinh^{-1}(x_F) \right] \\
p(k_F) &= \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} \left[x_F \sqrt{1 + x_F^2} (2x_F^2 - 3) + 3 \sinh^{-1}(x_F) \right] \tag{2.3.6}
\end{aligned}$$

debido a la evidente dificultad de relacionar directamente las ecuaciones (2.3.5) y (2.3.6) de la forma $p \equiv p(\epsilon)$, para obtener una forma politrópica, se usarán dos aproximaciones, la primera, una de

tipo relativista, considerando grandes momentos (*velocidad*) matemáticamente $k_F \gg m_e c$ o dicho de otra forma $x_F \gg 1$ utilizando esto y el despeje de ϵ de la ecuación (2.3.4), en (2.3.6), considerando que $\sinh^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{1 + y^2}) \ll y$ bajo este régimen, obtenemos

$$\begin{aligned}
p_{Rel} &\approx \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} \left[x_F \sqrt{x_F^2} (2x_F^2) \right] \\
&\approx \frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{\hbar}{m_e c} \left[\frac{3\pi^2 \rho}{m_N A} Z \right]^{\frac{1}{3}} \right)^4 \\
&\approx \frac{m_e^4 c^5}{12\pi^2 \hbar^3} \left(\left(\frac{\hbar}{m_e c} \right)^3 \frac{3\pi^2 \epsilon c^2 Z}{m_N A} \right)^{\frac{4}{3}} \\
&\approx \frac{c\hbar}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2 Z}{m_N c^2 A} \right)^{\frac{4}{3}} \epsilon^{\frac{4}{3}} \\
p_{Rel} &\approx K_{Rel} \epsilon^{\frac{4}{3}}
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

para el caso no relativista $k_F \ll m_e c$ o en nuestra variable auxiliar $x_F \ll 1$ tendremos la integral previa a la solución de (??) de la forma

$$\begin{aligned}
p_{NRel} &= \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{x_F} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \\
&\approx \frac{m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{x_F} \frac{x^4}{\sqrt{1}} dx \\
&\approx \frac{m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{x_F} x^4 dx \\
&\approx \frac{m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \frac{x_F^5}{5} \\
&\approx \frac{m_e^4 c^5}{15\pi^2 \hbar^3} \left(\frac{\hbar}{m_e c} \left[\frac{3\pi^2 \rho}{m_N A} Z \right]^{\frac{1}{3}} \right)^5 \\
&\approx \frac{\hbar^2}{15m_e \pi^2} \left[\frac{3\pi^2 \epsilon}{c^2 m_N A} Z \right]^{\frac{5}{3}} \\
&\approx \frac{\hbar^2}{15m_e \pi^2} \left[\frac{3\pi^2 Z}{c^2 m_N A} \right]^{\frac{5}{3}} \epsilon^{\frac{5}{3}} \\
p_{NRel} &\approx K_{NRel} \epsilon^{\frac{5}{3}}
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

con lo cual obtenemos dos ecuaciones que permiten relacionar la presión y densidad de energía de enanas blancas de manera sencilla, para completar nuestro sistema de ecuaciones que describen la estructura interna de nuestra estrella en estudio.

Para el caso de la estrella de neutrones, la ecuación politrópica para el caso no relativista mantiene

su exponente $\gamma = 5/3$, con una ligera diferencia en su constante, debido a que las partículas que generan la presión, son las mismas que aquellas que aportan la energía en reposo, siendo esta constante

$$K_{NRel} = \frac{\hbar^2}{15m_n\pi^2} \left[\frac{3\pi^2}{m_n c^2} \frac{Z}{A} \right]^{\frac{5}{3}} \quad (2.3.9)$$

sin embargo, por el mismo argumento anterior, para el caso relativista se tiene debido a respetar la estadística de Fermi-Dirac, una relación mucho más sencilla entre presión y densidad de energía, con $K_{Rel} = 1/3$ y así

$$p_{Rel} = K_{NRel}\epsilon \quad (2.3.10)$$

con lo cual e completa la cantidad de ecuaciones necesarias para la resolución numérica de nuestro sistema que describe

Capítulo 3

Tratamiento Numérico

Debido a la escala de los valores a tratar, por ejemplo presiones centrales relativistas del orden de $P \sim 10^{40}$ en unidades de $kg * (s^2 km)^{-1}$ y la masa solar con un valor de $M_{\odot} \approx 1,9891 \times 10^{30} kg$, se vuelve necesario realizar un tratamiento a las ecuaciones que conforman nuestro sistema, de manera de quitar las dimensiones de las principales variables en estudio, las cuales son presión $p(r)$, densidad de energía $\epsilon(r)$ y masa $M(r)$, todas ellas en función de la distancia radial desde el centro de la estrella r , para ello el primer cambio a realizar es utilizar factores adimensionales, en este caso para la masa, se utilizará la masa solar como unidad de medida, transformando la variable original en una nueva variable de estudio $\bar{m}(r)$ de la forma $M(r) = \bar{m}(r)M_{\odot}$ y para la presión y densidad de energía se utiliza la misma constante, ya que consideramos la velocidad de la luz $c = 1$, tenemos $p(r) = \epsilon_0 \bar{p}(r)$ y $\epsilon(r) = \epsilon_0 \bar{\epsilon}(r)$, con lo cual, las ecuaciones comenzando desde la ecuación de masa (2.1.4), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dr}(r) &= 4\pi \frac{r^2}{c^2} \epsilon(r) \\ \frac{d(M_{\odot} \bar{m})}{dr}(r) &= 4\pi \frac{r^2}{c^2} \epsilon_0 \bar{\epsilon}(r) \\ \frac{d\bar{m}}{dr}(r) &= 4\pi \frac{r^2 \epsilon_0}{c^2 M_{\odot}} \bar{\epsilon}(r)\end{aligned}\tag{3.0.1}$$

ahora con un procedimiento similar, para la ecuación newtoniana de equilibrio de fuerzas (2.1.5), se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dr}(r) &= -\frac{GM(r)\epsilon(r)}{c^2 r^2} \\
\frac{d(\epsilon_0 \bar{p})}{dr}(r) &= -\frac{GM_\odot \bar{m}(r) \epsilon_0 \bar{\epsilon}(r)}{c^2 r^2} \\
\frac{d\bar{p}}{dr}(r) &= -\frac{GM_\odot \bar{m}(r) \bar{\epsilon}(r)}{c^2 r^2} \\
\frac{d\bar{p}}{dr}(r) &= -\frac{GM_\odot}{c^2 r^2} \bar{m}(r) \bar{\epsilon}(r)
\end{aligned} \tag{3.0.2}$$

emulando este procedimiento para las ecuaciones de *TOV* (2.2.20) y *TOV* con adición de constante cosmológica Λ (2.2.26), además de trabajar los factores de forma de evitar las indeterminaciones numéricas que podrían provocarse por terminos de la forma $\frac{0}{0}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dr} &= -\frac{M}{r^2} (\epsilon + p) \left[1 + 4\pi \frac{p}{M} r^3 \right] \left[1 - 2\frac{M(r)}{r} \right]^{-1} \\
\frac{d(\epsilon_0 \bar{p})}{dr} &= -\frac{M_\odot \bar{m}(r)}{r^2} (\epsilon_0 \bar{\epsilon}(r) + \epsilon_0 \bar{p}(r)) \left[1 + 4\pi \frac{\epsilon_0 \bar{p}(r)}{M_\odot \bar{m}(r)} r^3 \right] \left[1 - 2\frac{M_\odot \bar{m}(r)}{r} \right]^{-1} \\
\frac{d\bar{p}}{dr} &= -(\bar{\epsilon}(r) + \bar{p}(r)) \left[\frac{M_\odot \bar{m}(r)}{r} + 4\pi \epsilon_0 \bar{p}(r) r^2 \right] [r - 2M_\odot \bar{m}(r)]^{-1}
\end{aligned} \tag{3.0.3}$$

al incluir Λ en la ecuación anterior y repetir el procedimiento, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dr} &= -\frac{M}{r^2} (\epsilon + p) \left[1 + 4\pi \frac{p}{M} r^3 + \Lambda \frac{r^3}{3M} \right] \left[1 - 2\frac{M(r)}{r} - \Lambda \frac{r^2}{3} \right]^{-1} \\
\frac{d(\epsilon_0 \bar{p})}{dr} &= -\frac{M_\odot \bar{m}(r)}{r^2} (\epsilon_0 \bar{\epsilon}(r) + \epsilon_0 \bar{p}(r)) \left[1 + 4\pi \frac{\epsilon_0 \bar{p}(r)}{M_\odot \bar{m}(r)} r^3 + \Lambda \frac{r^3}{3M_\odot \bar{m}(r)} \right] \left[1 - 2\frac{M_\odot \bar{m}(r)}{r} - \Lambda \frac{r^2}{3} \right]^{-1} \\
\frac{d\bar{p}}{dr} &= -(\bar{\epsilon}(r) + \bar{p}(r)) \left[\frac{M_\odot \bar{m}(r)}{r} + 4\pi \epsilon_0 \bar{p}(r) r^2 + \Lambda \frac{r^2}{3} \right] \left[r - 2M_\odot \bar{m}(r) - \Lambda \frac{r^3}{3} \right]^{-1}
\end{aligned} \tag{3.0.4}$$

Una vez obtenidas estas 3 expresiones del par de sistemas de ecuaciones que se contrastan durante el trabajo, es necesario adaptarlos a los distintos regímenes de trabajo siendo 3 los principales. Como se estudió en el capítulo anterior, dos de ellos se encuentran contenidos directamente en el análisis politrópico, para el caso de ecuaciones de la forma $p(r) = K\epsilon^\gamma$ en el cual tanto la constante K , como el exponente γ corresponden al caso relativista o no relativista, según las presiones centrales en estudio como condición inicial del problema de sistema de ecuaciones diferenciales, con el cual al considerar las variables sin dimensión y el cambio correspondiente $\bar{\epsilon}(r) = \left(\frac{\bar{p}(r)}{K} \right)^{1/\gamma}$, donde

$\bar{K} = K\epsilon^{\gamma-1}$ obteniendo de esta forma las siguientes ecuación mediante manipulación aritmética del término de densidad de energía

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{m}}{dr}(r) &= 4\pi \frac{r^2 \epsilon_0}{c^2 M_\odot} \left(\frac{\bar{p}(r)}{\bar{K}} \right)^{1/\gamma} \\ \frac{d\bar{n}}{dr}(r) &= 4\pi \frac{\epsilon_0}{c^2 M_\odot \bar{K}^{1/\gamma}} r^2 \bar{p}(r)^{1/\gamma}\end{aligned}\quad (3.0.5)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{p}}{dr}(r) &= -\frac{GM_\odot}{c^2 r^2} \bar{m}(r) \left(\frac{\bar{p}(r)}{\bar{K}} \right)^{1/\gamma} \\ \frac{d\bar{p}}{dr}(r) &= -\frac{GM_\odot}{c^2 \bar{K}^{1/\gamma}} \frac{\bar{m}(r) \bar{p}(r)^{1/\gamma}}{r^2}\end{aligned}\quad (3.0.6)$$

$$\frac{d\bar{p}}{dr} = - \left(\left(\frac{\bar{p}(r)}{\bar{K}} \right)^{1/\gamma} + \bar{p}(r) \right) \left[\frac{M_\odot \bar{m}(r)}{r} + 4\pi \epsilon_0 \bar{p}(r) r^2 \right] [r - 2M_\odot \bar{m}(r)]^{-1} \quad (3.0.7)$$

$$\frac{d\bar{p}}{dr} = - \left(\left(\frac{\bar{p}(r)}{\bar{K}} \right)^{1/\gamma} + \bar{p}(r) \right) \left[\frac{M_\odot \bar{m}(r)}{r} + 4\pi \epsilon_0 \bar{p}(r) r^2 + \Lambda \frac{r^2}{3} \right] \left[r - 2M_\odot \bar{m}(r) - \Lambda \frac{r^3}{3} \right]^{-1} \quad (3.0.8)$$

Sin embargo, pese a que estas ecuaciones son consecuentes con las presiones centrales consideradas como argumento de entrada para solucionar el sistema de ecuaciones diferenciales, es importante tener presente que conforme las soluciones avanzan desde el centro de nuestra estrella, hacia sus capas exteriores, el régimen que rige por las presiones experimentadas en estas áreas, pese a que el centro sea de carácter relativista, será un sector donde sus partículas se comportarán como *no relativistas*, por lo tanto se realiza un ajuste en el cual se puedan conectar las ecuaciones obtenidas para las densidades de energía y presiones que representen esta situaciones mediante constantes de la forma $\bar{\epsilon}(r) = A_{NR} \bar{p}(r)^{1/\gamma_{NR}} + A_R \bar{p}(r)^{1/\gamma_R}$ donde A_i y γ_i , representan el valor correspondiente para el ajuste y coeficiente politrópico para el régimen relativista $i = R$ y el no relativista $i = NR$, pasando así nuestras ecuaciones a tener la expresión

$$\frac{d\bar{m}}{dr}(r) = 4\pi \frac{\epsilon_0}{c^2 M_\odot} \left(A_{NR} \bar{p}(r)^{1/\gamma_{NR}} + A_R \bar{p}(r)^{1/\gamma_R} \right) r^2 \quad (3.0.9)$$

$$\frac{d\bar{p}}{dr}(r) = -\frac{GM_{\odot}}{c^2} \frac{\bar{m}(r)}{r^2} \left(A_{NR}\bar{p}(r)^{1/\gamma_{NR}} + A_R\bar{p}(r)^{1/\gamma_R} \right) \quad (3.0.10)$$

$$\frac{d\bar{p}}{dr} = -\left(\left(A_{NR}\bar{p}(r)^{1/\gamma_{NR}} + A_R\bar{p}(r)^{1/\gamma_R} \right) + \bar{p}(r) \right) \left[\frac{GM_{\odot}\bar{m}(r)}{r} + \frac{4\pi G\epsilon_0}{c^2} \bar{p}(r)r^2 \right] [rc^2 - 2GM_{\odot}\bar{m}(r)]^{-1} \quad (3.0.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{dr} = & -\left(\left(A_{NR}\bar{p}(r)^{1/\gamma_{NR}} + A_R\bar{p}(r)^{1/\gamma_R} \right) + \bar{p}(r) \right) \left[\frac{GM_{\odot}\bar{m}(r)}{r} + \frac{4\pi G\epsilon_0}{c^2} \bar{p}(r)r^2 + \Lambda c^2 \frac{r^2}{3} \right] * \\ & * \left[rc^2 - 2GM_{\odot}\bar{m}(r) - \Lambda c^2 \frac{r^3}{3} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.0.12)$$

y son estas ecuaciones las que finalmente trataremos con el algoritmo de aproximación numérica de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que se estudiará en el capítulo siguiente, como se puede observar, se incluyó en las ecuaciones finales términos de velocidad de la luz c y de constante de gravitación universal G que originalmente se habían igualado a 1 para facilitar los cálculos.

Capítulo 4

Algoritmos Eficientes de Solución Numérica

Para solucionar las ecuaciones del sistema adimensional dadas por (3.0.1) y (3.0.3), o (3.0.1) y (3.0.4), se hizo en primera instancia una prueba con dos métodos numéricos en el sistema bajo un régimen Newtoniano, sin considerar correcciones relativistas como las de la ecuación de TOV. El primero de ellos, es uno de paso fijo, bien conocido, el "*Método de Runge-Kutta de cuarto orden*" como se puede ver en [19] y el segundo un método de paso variable llamado BS (). Ambos serán detallados a continuación.

4.1. Runge-Kutta

Si bien son una familia de métodos iterativos genéricos de aproximación numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales desarrollados en torno al año 1900 en conjunto por los físicos y matemáticos Martín Kutta y Carl Runge, nos centraremos en el uso de uno de los más conocidos, que es el "*Método de Runge-Kutta de cuarto orden*", el cual tiene un error local de truncamiento del orden $O(h^4)$ siendo h el ancho fijo en el que se desarrolla la iteración, para un problema de valores iniciales $y'(t) = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$; $t \in [t_0, t_N]$, aproximamos una solución

numérica de $N + 1$ puntos distribuidos uniformemente a una distancia $h = \frac{t_N - t_0}{N}$, el algoritmo entrega los valores de ω_i para los puntos $i = \{1, 2, \dots, N\}$, con valor inicial $\omega_0 = y_0$, establecidos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \text{para } i &= \{1, 2, \dots, N\} \text{ repetir} \\
 K_1 &= hf(t_{i-1}, \omega_{i-1}) \\
 K_2 &= hf\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, \omega_{i-1} + \frac{K_1}{2}\right) \\
 K_3 &= hf\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, \omega_{i-1} + \frac{K_2}{2}\right) \\
 K_4 &= hf(t_{i-1} + h, \omega_{i-1} + K_3) \\
 \omega_i &= \omega_{i-1} + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)
 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

de esta manera obtenemos los puntos de aproximación numérica $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N$ con los cuales se analizan resultados. Ya que en nuestro caso tenemos un sistema para la masa y presión, el algoritmo se expresará de la siguiente manera con condiciones iniciales para $r_0 = 0$, $M(r_0) = 0$ y $p(r_0) = P_0$, donde este último valor se seleccionará considerando los regímenes establecidos al momento de estudiar las ecuaciones politrópicas de estado, además como se desconoce a priori el tamaño de los cuerpos celestes, el paso fijo queda preestablecido sin considerar la cantidad de puntos, si no, solamente su tamaño, junto a esto se genera una condición de frontera, cuando el punto $r_N = R$ sea el primero que cumpla con $p(R) \leq 0$, a este valor R le llamaremos *Radio de la estrella*, con lo cual $M(R)$ es la *Masa total de la estrella*, tendremos entonces nuestro sistema como

$$\begin{cases} M'(r) = f(r, M, p) \\ p'(r) = g(r, M, p) \end{cases} \tag{4.1.2}$$

el cual se aproxima mediante Runge-Kutta 4 como

$$\begin{aligned}
\text{para } i &= \{1, 2, \dots\} \text{ mientras } p(r_i) > 0 \text{ repetir} \\
K_1 &= hf(t_{i-1}, \omega_{i-1}, v_{i-1}) \\
H_1 &= hg(t_{i-1}, \omega_{i-1}, v_{i-1}) \\
K_2 &= hf\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, \omega_{i-1} + \frac{K_1}{2}, v_{i-1} + \frac{H_1}{2}\right) \\
H_2 &= hg\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, \omega_{i-1} + \frac{K_1}{2}, v_{i-1} + \frac{H_1}{2}\right) \\
K_3 &= hf\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, \omega_{i-1} + \frac{K_2}{2}, v_{i-1} + \frac{H_2}{2}\right) \\
H_3 &= hg\left(t_{i-1} + \frac{h}{2}, \omega_{i-1} + \frac{K_2}{2}, v_{i-1} + \frac{H_2}{2}\right) \\
K_4 &= hf(t_{i-1} + h, \omega_{i-1} + K_3, v_{i-1} + H_3) \\
H_4 &= hg(t_{i-1} + h, \omega_{i-1} + K_3, v_{i-1} + H_3) \\
\omega_i &= \omega_{i-1} + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
v_i &= v_{i-1} + \frac{1}{6}(H_1 + 2H_2 + 2H_3 + H_4)
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

de esta forma se obtiene la aproximación necesaria para analizar el comportamiento de la estrella en estudio.

4.2. Método de Bulirsch-Stoer

A diferencia del método anterior, en el cual el paso h entre el cual se calculaban las aproximaciones del valor de las funciones del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias se fijaba desde el comienzo del algoritmo, para el caso de Bulirsch-Stoer [20], este paso es adaptativo conforme avanza el procedimiento, lo cual es de fundamental importancia en el estudio de sistemas de ecuaciones en los cuales se presenta en cortos periodos de tiempo gran aporte de alguna de las variables de estudio, para luego esta pasar a ser prácticamente irrelevante por disminuir rápidamente su valor, a este tipo de sistemas se les llama ecuaciones rígidas, lo cual es nuestro caso donde la presión es dominante en los sectores internos de las estrellas, no así en las zonas externas donde el comportamiento viene regido por la masa de éstas, así este método presenta una gran mejora en la velocidad de funcionamiento. Este es una perfeccionamiento del método de punto medio, de la siguiente ma-

nera.

En primera instancia, el principio fundamental detrás de este algoritmo es el siguiente, se considera un intervalo de amplitud H , de la forma $[t, t + H]$, en el cual se realiza el proceso de integración numérica de la solución se realiza varias veces para distintos pasos, donde se utiliza un subíndice i para indicar el número de la integración, para obtener el valor correcto de la función en el extremo $t + H$ y obtener además los valores y_n en (4.2) comenzando desde el valor inicial $y_0 = y(t)$ con $n = H/h$ pasos.

Ya que el ancho de estos pasos va disminuyendo, consideramos las aproximaciones del valor de $y(t + H)$ para cada vez mayor cantidad de puntos en el intervalo (4.2), digamos estos $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$, para anchos correspondientes h_1, h_2, h_3, \dots con la propiedad decreciente ($h_1 > h_2 > h_3 > \dots$), la noción detrás de esta idea es pensar que $y(t + H) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n$ o sea como n depende de h es el equivalente a decir que $h \rightarrow 0$.

El detalle de este procedimiento es el siguiente, se toman valores decrecientes ($h_1 > h_2 > h_3 > \dots$), para estimar los valores de $y(t + H)$ mediante los valores ω_i asociados a cada tamaño de paso h_i

- (i) Para cada tamaño de paso h_i , calculamos el valor integrado ω_i y se actualiza un valor estimado extrapolado actual de y para $h = 0$, esto a partir del anterior valor actual y los valores ω_i previamente obtenidos.
- (ii) Si la diferencia entre el actual valor estimado y el anterior es despreciable, carece de sentido continuar disminuyendo el valor de h , y por tanto se considera este valor como la mejor aproximación para $y(t + H)$. Si se da el caso de que nuestras estimaciones no convergen pasado una cota preestablecida de disminuciones (digamos $i > N_0$), se detiene el procedimiento y volvemos al inicio t , con la diferencia que el intervalo de integración (4.2) se actualiza a $[t, t + H/4]$ y se vuelve al paso anterior.
- (iii) Si la convergencia del valor estimado se presenta para un paso intermedio (entre h_1 y h_{N_0}), se realiza un ajuste del siguiente intervalo de integración con la idea de que se mantenga relativamente constante la cantidad de subintervalos. En caso de tener menos de lo deseado, se aumenta su tamaño por un valor de 1,2 (*i.e.* $H \rightarrow 1,2H$) y en caso de ser igual, se disminuye un poco el intervalo, por un factor de 0,95.

Para realizar la integración entre t y $t + H$ se realiza lo siguiente, con n cantidad de subintervalos deseados en cada paso

$$\left\{ \begin{array}{l} h = \frac{H}{n} \\ z_0 = y(t) \\ z_1 = z_0 + hf(t, z_0) \\ z_{i+1} = z_{i-1} + 2hf(t + ih, z_i) \text{ para } i = 1, \dots, n - 1 \\ \omega_n = \frac{1}{2} (z_n + z_{n-1} + hf(t + H, z_n)) \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

con lo cual obtendremos los puntos y_n , para cada subintervalo de integración $[t, t + H]$ hasta cubrir todo el rango de valores, que en nuestro caso presenta mejor procesamiento, ya que no tenemos inicialmente un rango fijo de valores de distancias desde el centro de la estrella, debido a la condición de frontera y por ende de detención del algoritmo $p(R) \leq 0$, la ventaja de este algoritmo es su adaptación no solo del paso en cada subintervalo, si no que gracias a esto, actualiza constantemente el siguiente punto de evaluación, y en caso de no converger, puede solucionar esto mediante disminución de estos intervalos.

4.3. Contraste

A continuación se presenta una tabla de valores obtenidos, disminuyendo los valores de intervalo mínimo de trabajo, de ambos algoritmos, solucionando el sistema en régimen newtoniano, a modo de prueba, para elegir con cual de ellos se trabajaría en la aproximación de soluciones del sistema con la ecuación de TOV y principalmente para el caso de inclusión de constante cosmológica Λ . Con los resultados de este experimento, se decidió trabajar con este ultimo algoritmo de *BS* debido a la ganancia en términos temporales de procesamiento, los cuales asumimos se podrían ver ampliamente acrecentados debido a las características propias de las funciones implicadas en el sistema de ecuaciones y posibles valores de indefinición.

Como se puede observar en la tabla (4.1) conforme se disminuye el tamaño del paso mínimo admitido los tiempos de procesamiento con la rutina de *RK* llegan a ser prácticamente 5 veces los tiempos obtenidos con *BS*, lo cual es uno de los principales argumentos para decidir la utilización de esta ultima rutina en la solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, junto con

Rut	h	tiempo	Presión límite	Masas	Radio (km)
BS	1×10^0	0,52	$1,223 \times 10^{-33}$	1,2432	8195,000
RK	1×10^0	0,41	$9,465 \times 10^{-33}$	1,2433	8194,000
BS	5×10^{-1}	0,57	$3,840 \times 10^{-35}$	1,2432	8195,000
RK	5×10^{-1}	0,83	$5,787 \times 10^{-34}$	1,2433	8194,500
BS	1×10^{-1}	1,16	$1,112 \times 10^{-36}$	1,2432	8194,800
RK	1×10^{-1}	4,34	$7,837 \times 10^{-37}$	1,2433	8194,900
BS	5×10^{-2}	1,86	$1,409 \times 10^{-38}$	1,2432	8194,850
RK	5×10^{-2}	7,86	$3,733 \times 10^{-38}$	1,2433	8195,000
BS	1×10^{-2}	7,47	$2,197 \times 10^{-41}$	1,2432	8194,850
RK	1×10^{-2}	37,78	$3,753 \times 10^{-41}$	1,2433	8195,000
BS	5×10^{-3}	14,36	$1,329 \times 10^{-42}$	1,2432	8194,845
RK	5×10^{-3}	75,34	$5,012 \times 10^{-42}$	1,2433	8195,000

Cuadro 4.1: Comparativa rutinas RK-BS bajo régimen de presiones estelares relativistas, de valor central $P_0 = 10^{27} \frac{Kg}{Km*s^2}$

esto, la condición de frontera, presenta márgenes más amplios para la rutina *RK* nuevamente del orden de casi 5 veces, indicando que *BS* tiene una mejor aproximación para la frontera de la estrella en estudio, como era de esperar, debido a que la presión central como condición inicial es la misma en cada aproximación, los valores obtenidos de masa total y radio final de la Enana blanca no presentan mayores diferencias que puedan servir de argumento para la decantación por alguna de estas rutinas de solución.

Capítulo 5

Análisis de Resultados

En el siguiente capítulo analizaremos los resultados obtenidos en los diversos regímenes, para los modelos y ecuaciones enunciadas en los capítulos previos, en los cuales veremos como se comportan las características principales de las estrellas bajo los efectos de la variación del valor medido de constante cosmológica.

5.1. Modelo Clásico Newtoniano

Es importante comenzar analizando los resultados que se obtienen para los modelos estelares, sin tener en cuenta los efectos relativistas que surgen del estudio de la ecuación de campo de Einstein [17], por tanto inicialmente trabajaremos con el sistema de ecuaciones conformado por (3.0.5) y (3.0.6), en primera instancia, utilizando el sistema para un gas de fermi de electrones, con constante politrópica $\gamma = 5/3$ correspondiente al caso de momentos no relativistas $k_F \ll m_e c^2$, que utilizando la ecuación de presión (2.3.6) con valores en este rango, obtenemos los siguientes resultados con presiones centrales del orden de $p_0 \sim 10^{24} \frac{kg}{s^2 km}$, con valor de constante de dimensionalidad para la presión y densidad de energía de $\epsilon_0 = 2,4888 \times 10^{39} \frac{kg}{s^2 km}$ y masa solar $M_\odot = 1,989 \times 10^{30} kg$, se tienen los siguientes valores en la tabla (5.1)

P_0	\bar{P}_0	R (km)	M	Presión límite ($\bar{P}(R)$)
$2,65 \times 10^{23}$	$1,107 \times 10^{-14}$	4836,7	1,2432	$2,386 \times 10^{-35}$
$2,65 \times 10^{24}$	$1,107 \times 10^{-15}$	8601,1	1,2432	$1,731 \times 10^{-37}$
$2,65 \times 10^{25}$	$1,173 \times 10^{-16}$	15075,9	1,2432	$7,554 \times 10^{-39}$

Cuadro 5.1: Radios R (km) y masa M (M_\odot) para enanas blancas en régimen no relativista

y tenemos las siguientes gráficas de presión y masa en función de la distancia radial al centro de la estrella (5.1),(5.2)

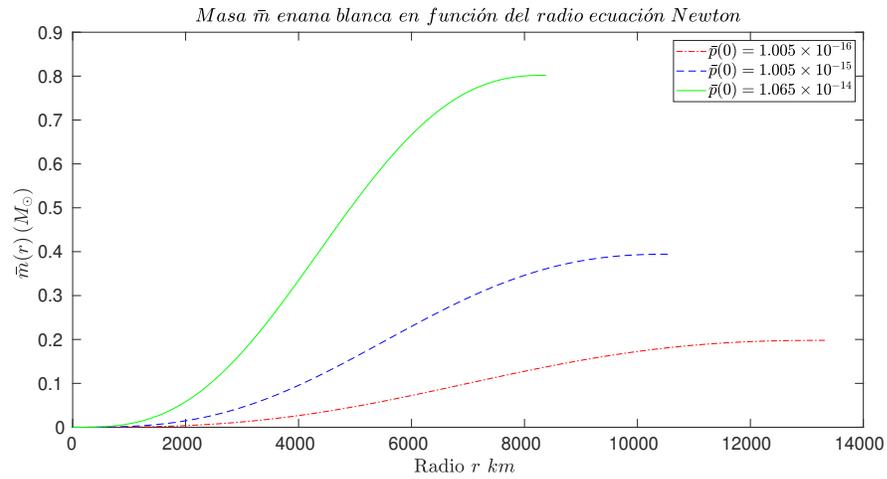


Figura 5.1: Masa enana blanca $\bar{m}(r)$ en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$, en régimen no relativista con ecuación de clásica de Newton.

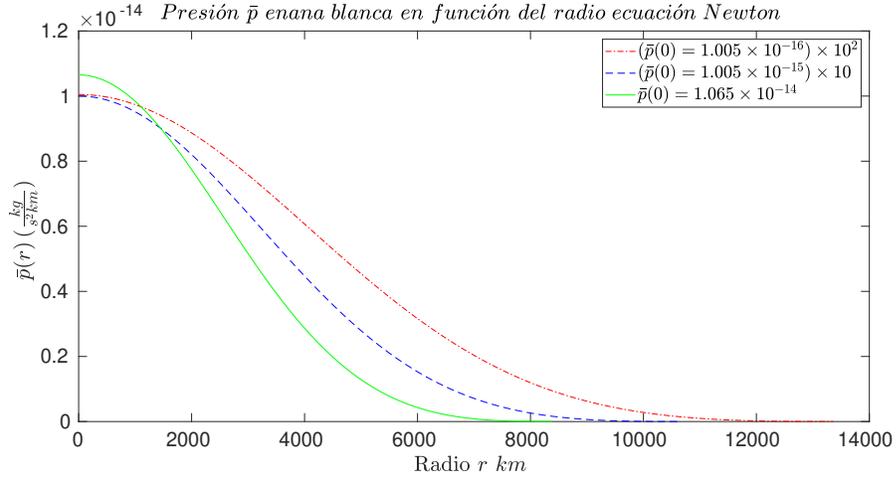


Figura 5.2: Presión enana blanca $\bar{p}(r)$ en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$, en régimen no relativista con ecuación de clásica de Newton.

Se puede ver como la presión presenta un comportamiento de decrecimiento suave hasta las capas superiores de la enana blanca con una pendiente central marcada, hasta llegar a cero y así detener la medición de las funciones, se puede notar que la masa acumulada es muy pequeña, esto debido al régimen en el que se encuentran las partículas en su interior y que esta disminuye conforme lo hace la presión central inicial, siendo la baja presión incapaz de generar la acumulación de masa.

Ahora para un régimen relativista con número politrópico $\gamma = 4/3$, presiones centrales del orden de $p_0 \sim 10^{27} \frac{kg}{s^2 km}$ y constante adimensional $\epsilon_0 = 7,446 \times 10^{41} \frac{kg}{s^2 km}$, obteniendo así los siguientes valores y gráficas

P_0	\bar{P}_0	R (km)	M	Presión límite ($\bar{P}(R)$)
$0,824 \times 10^{26}$	$1,173 \times 10^{-16}$	15075,9	1,2432	$7,554 \times 10^{-39}$
$0,824 \times 10^{27}$	$1,107 \times 10^{-15}$	8601,1	1,2432	$1,731 \times 10^{-37}$
$0,873 \times 10^{28}$	$1,107 \times 10^{-14}$	4836,7	1,2432	$2,386 \times 10^{-35}$

Cuadro 5.2: Radios R (km) y masa M (M_\odot) para enanas blancas en régimen relativista con modelo clásico de Newton

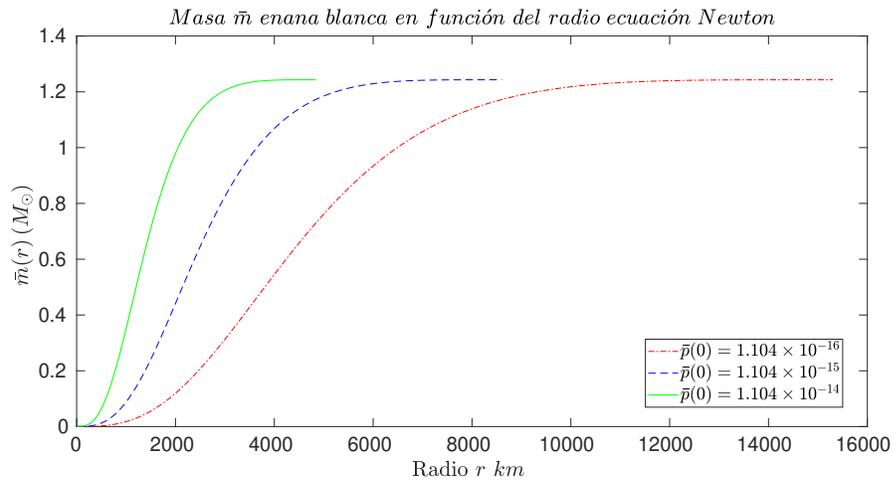


Figura 5.3: Masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen relativista con modelo clásico de Newton.

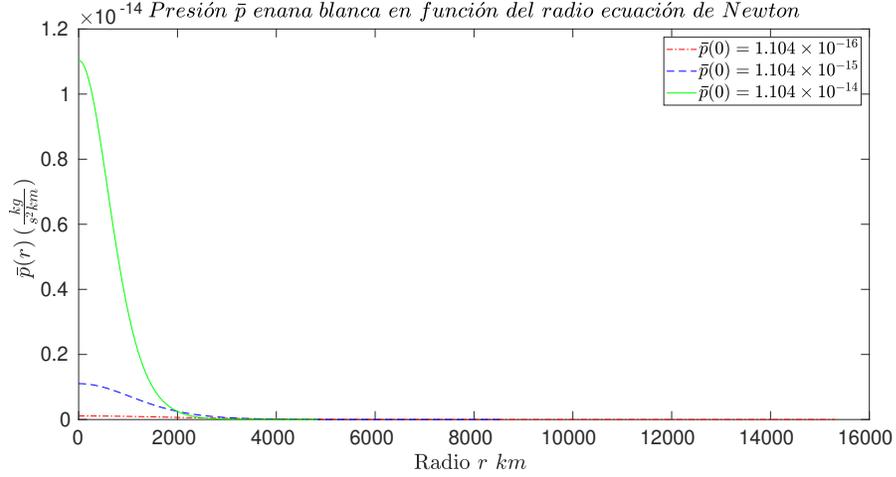


Figura 5.4: Presión $\bar{p}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen relativista con modelo clásico de Newton.

El comportamiento de la presión es bastante similar al caso previo salvo por un rápido decaimiento de ésta como se verificar en las gráficas (5.2,5.4), sin embargo se puede notar que si bien los radios finales de las estrellas en este caso difieren bastante cuando varía la presión central inicial, las masas totales de los distintos cuerpos encuentra una asintota prácticamente constante consecuente al límite calculado por Chandrasekhar, esto se puede ver explicado debido a que en este régimen gracias a la solución de Lane -Emden para politrópos donde la masa no depende de la densidad de energía para el valor $\gamma = 4/3$ [21] como se puede ver en la solución siguiente

$$M = 4\pi\epsilon^{\frac{2(\gamma-4/3)}{3}} \left(\frac{K\gamma}{4\pi G(\gamma-1)} \right)^{3/2} \eta_1^2 |\theta(\eta_1)| \quad (5.1.1)$$

donde los valores η_1 y $\theta(\eta_1)$ son constantes numéricas dependientes del número politrópico.

Se realiza un estudio similar que en el caso de las enanas blancas, para las estrellas de neutrones el tratamiento numérico se realiza con el modelo newtoniano en dos regímenes (no relativista y mixto ajustado).

En el caso no relativista con $k_F \ll m_n c^2$, utilizamos un valor de número politrópico $\gamma = 5/3$ y constante de adimensionalidad $\epsilon_0 = 1,603 \times 10^{40} \frac{kg}{s^2 km}$, por lo cual los valores de presión central como condición inicial del problema de valores iniciales debe ser menores del orden de $p(0) \sim 10^{37}$

para mantener el modelo en los márgenes del régimen actual de estudio. A partir de esta solución numérica se obtienen los siguientes gráficos y resultados.

P_0	\bar{P}_0	R (km)	$M(R)$ (M_\odot)	Presión límite ($\bar{P}(R)$)
$1,603 \times 10^{33}$	1×10^{-7}	33,166	0,0978	$4,4178 \times 10^{-20}$
$1,603 \times 10^{34}$	1×10^{-6}	26,344	0,1951	$5,2657 \times 10^{-18}$
$1,603 \times 10^{35}$	1×10^{-5}	20,926	0,3894	$2,5853 \times 10^{-17}$
$1,603 \times 10^{36}$	1×10^{-4}	16,622	0,7769	$4,2387 \times 10^{-16}$
$1,603 \times 10^{37}$	1×10^{-3}	13,203	1,5500	$1,4678 \times 10^{-14}$

Cuadro 5.3: Radios R (km) y masa M (M_\odot) para estrellas de neutrones en régimen no relativista con modelo clásico de Newton

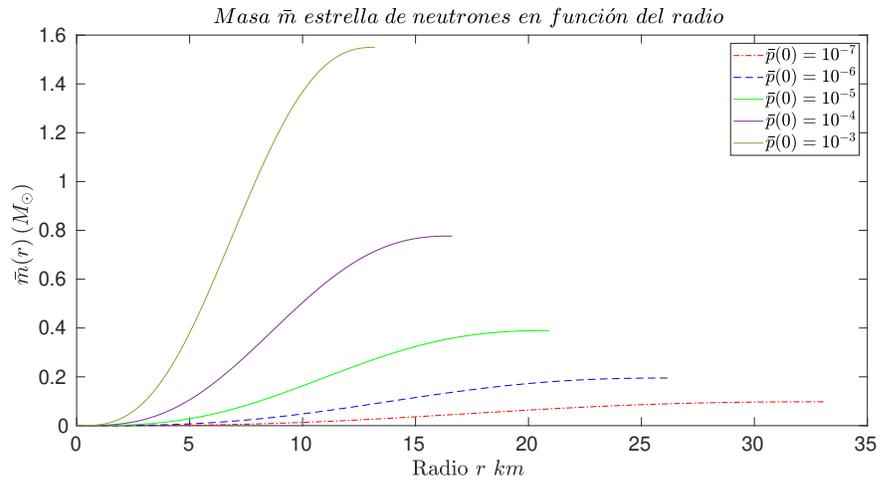


Figura 5.5: Masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen no relativista con modelo clásico de Newton.

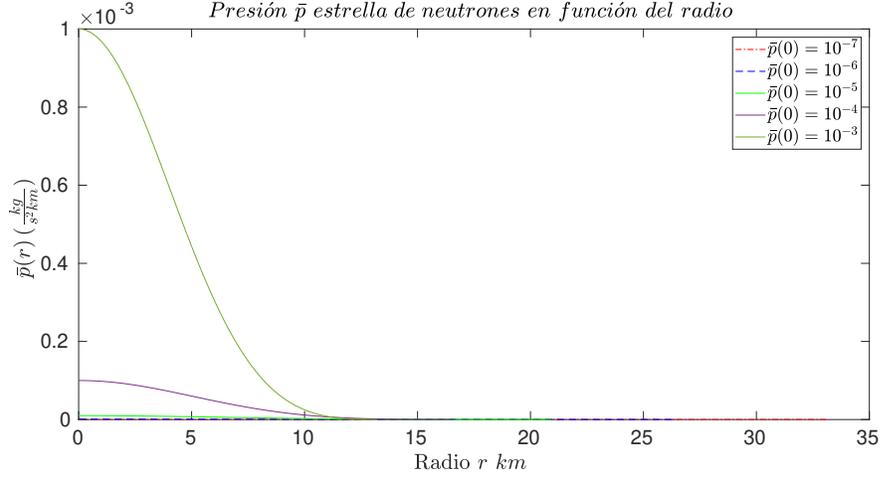


Figura 5.6: Presión $\bar{p}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen no relativista con modelo clásico de Newton.

Para el caso de régimen relativista los valores utilizados son de número prolitrópico $\gamma = 1$, constante de adimensionalidad $\epsilon_0 = 5,346 \times 10^{38} \frac{kg}{s^2 km}$ y presiones centrales del orden de $p(0) \sim 10^{37}$, sobre estos valores y los de régimen no relativista se realiza el ajuste con constantes $A_R = 2,8663$ y $A_{NR} = 2,4216$, valores con los cuales obtenemos los siguientes resultados :

P_0	\bar{P}_0	R (km)	$M(R)$ (M_\odot)	Presión límite ($\bar{P}(R)$)
$5,346 \times 10^{36}$	$1,0 \times 10^{-2}$	15,115	1,0430	$1,6 \times 10^{-13}$
$1,069 \times 10^{37}$	$2,0 \times 10^{-2}$	13,867	1,1984	$1,6 \times 10^{-14}$
$1,604 \times 10^{37}$	$3,0 \times 10^{-2}$	13,163	1,2897	$2,1 \times 10^{-14}$
$4,000 \times 10^{37}$	$7,5 \times 10^{-2}$	11,645	1,4846	$6,7 \times 10^{-14}$
$5,346 \times 10^{37}$	$1,0 \times 10^{-1}$	11,185	1,5401	$6,8 \times 10^{-13}$

Cuadro 5.4: Radios R (km) y masa M (M_\odot) para estrellas de neutrones régimen mixto ajustado con modelo Newtoniano

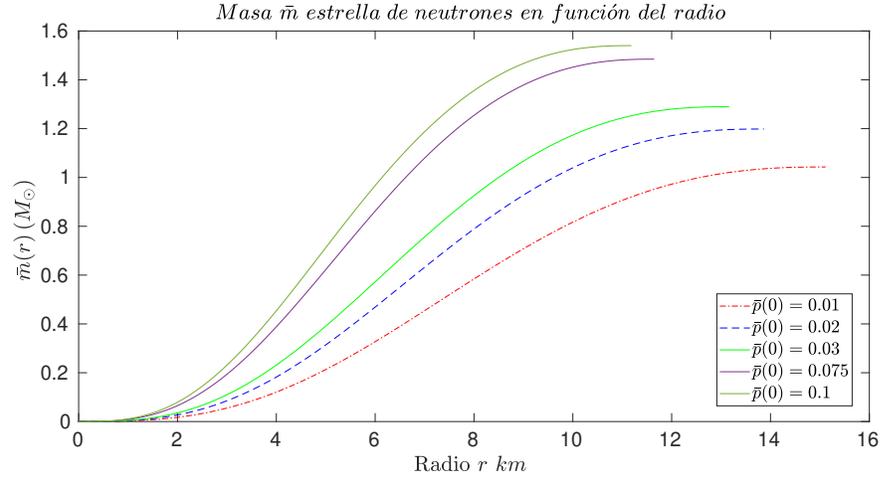


Figura 5.7: Masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen mixto ajustado con modelo clásico de Newton.

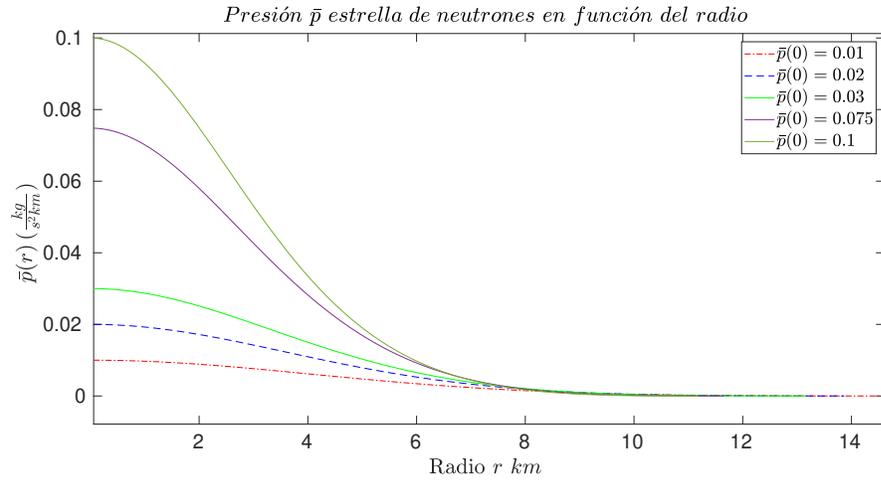


Figura 5.8: Presión $\bar{p}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen mixto ajustado con modelo clásico de Newton.

Como se puede evidenciar en las tablas y gráficas previas, se puede corroborar que los valores de masas totales de estos cuerpos en ningún régimen presentan constancia en su valor, pese a presentarse mayor similitud en el caso mixto ajustado, además de ello, se puede notar que conforme aumenta la presión central inicial del sistema, comienza una acumulación que supera los límites establecidos por *Chandrasekar*, lo cual es esperable, considerando que se evaluó para ambos regímenes con una ecuación clásica, por tanto el aporte relativista en el caso mixto es el que domina este aumento de masas fuera de las mediciones, misma razón por la cual no se trabajó esta ecuación para el caso relativista puro, siendo inconsecuente al tipo de modelo.

Lo que si es posible evidenciar en los casos de estudio es la considerable disminución de los radios finales de estos cuerpos siendo del orden del 2% con respecto al de las enanas blancas, para masas muy similares, lo que es consecuente con las observaciones de las altas densidades de las estrellas de neutrones. En términos generales sin embargo no existen diferencias considerables en el comportamiento de las presiones y distancias radiales entre ambos cuerpos.

5.2. Modelo en Relatividad General -TOV

Para precisar mejor el comportamiento real de las estrellas en estudio (Enanas Blancas y Estrellas de Neutrones), es necesario considerar las correcciones a la ecuación de Newton nacidas desde la solución de las ecuaciones de campo de Einstein como fue hecho por Tolman-Oppenheimer y Volkov y que se revisó en el capítulo (2) sección (2.2).

En esta sección se replican los valores utilizados en la anterior, ya que en esencia no cambia el régimen de estudio, simplemente la ecuación que describe la situación modelando las correcciones nacidas desde la teoría de relatividad de Einstein y de la solución de la ecuación de campo, por tanto se resumirán los valores utilizados y resultados obtenidos en cada uno de los cuerpos de estudio y regímenes correspondientes para su posterior análisis, generando un contraste de estos con los obtenidos a partir del estudio previo con ecuaciones clásicas.

5.2.1. Enanas Blancas

Régimen no relativista

P_0	\bar{P}_0	R (km)	M	Presión límite ($\bar{P}(R)$)
$2,65 \times 10^{23}$	$1,065 \times 10^{-16}$	13246,1	0,2003	$9,811 \times 10^{-30}$
$2,65 \times 10^{24}$	$1,065 \times 10^{-15}$	10521,3	0,3996	$1,124 \times 10^{-28}$
$2,65 \times 10^{25}$	$1,065 \times 10^{-14}$	8356,5	0,7970	$4,032 \times 10^{-28}$

Cuadro 5.5: Radios R (km) y masas M (M_\odot) para enanas blancas en régimen no relativista con modelo en relatividad general con ecuación de *TOV*

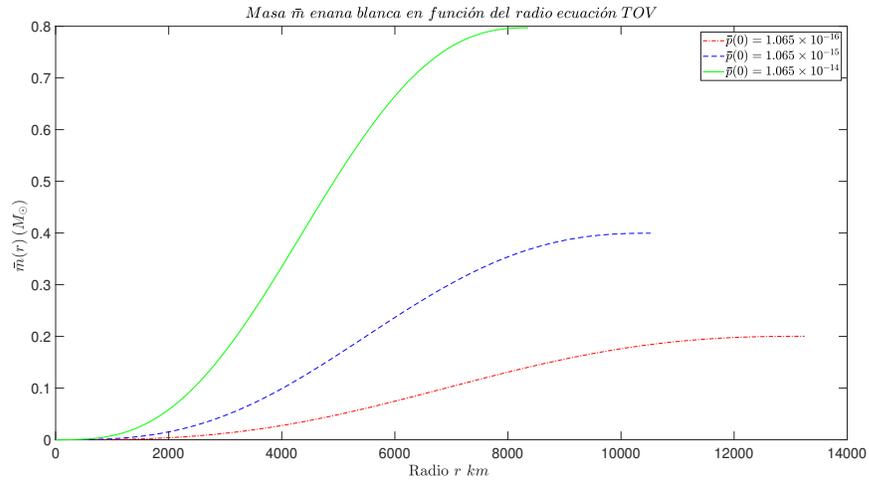


Figura 5.9: Masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen no relativista con modelo en relatividad con ecuación de TOV.

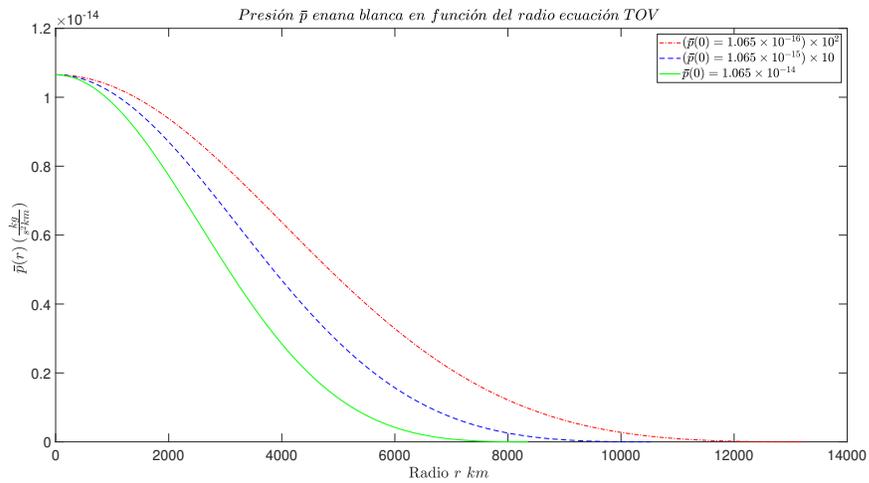


Figura 5.10: Presión $\bar{p}(r)$ (estandarizada) enana blanca en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen no relativista con modelo en relatividad con ecuación de TOV.

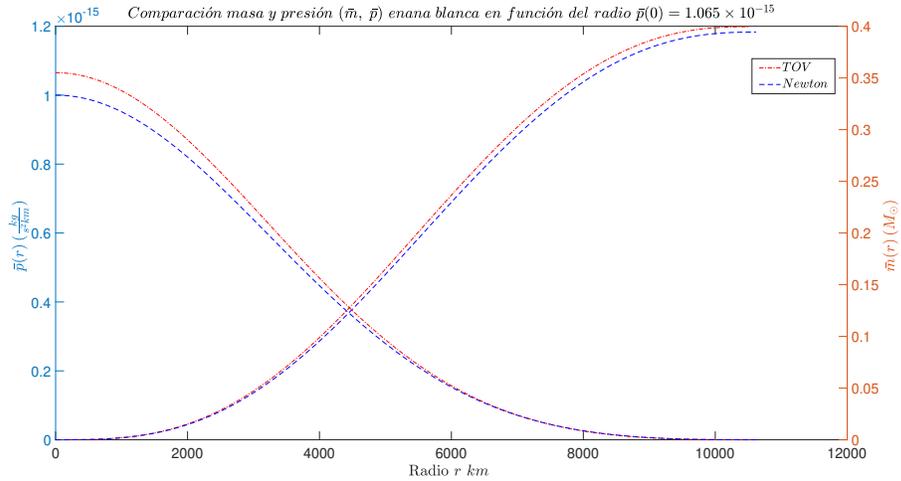


Figura 5.11: Contraste Masa $\bar{m}(r)$ y presión $\bar{p}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para presión central $\bar{p}(0) = 1,065 \times 10^{-15}$ en régimen no relativista con modelo en relatividad con ecuación de *TOV*.

Como es posible evidenciar en las gráficas (5.9,5.10,5.11) no existe una diferencia considerable entre los valores registrados por la solución del sistema con el modelo de ecuación de *TOV* y el de *Newton*, lo cual es esperable tomando en cuenta que es modelo no relativista y los aportes son menores en este caso para los términos con factores de relatividad general.

Régimen relativista

P_0	\bar{P}_0	R (km)	M	Presión límite ($\bar{P}(R)$)
$0,82 \times 10^{26}$	$1,104 \times 10^{-16}$	15302,8	1,2421	$2,024 \times 10^{-39}$
$0,82 \times 10^{27}$	$1,104 \times 10^{-15}$	8604,6	1,2414	$3,398 \times 10^{-37}$
$0,82 \times 10^{28}$	$1,104 \times 10^{-14}$	4838,0	1,2400	$2,955 \times 10^{-36}$

Cuadro 5.6: Radios R (km) y masas M (M_\odot) para enanas blancas en régimen no relativista con modelo en relatividad general con ecuación de *TOV*

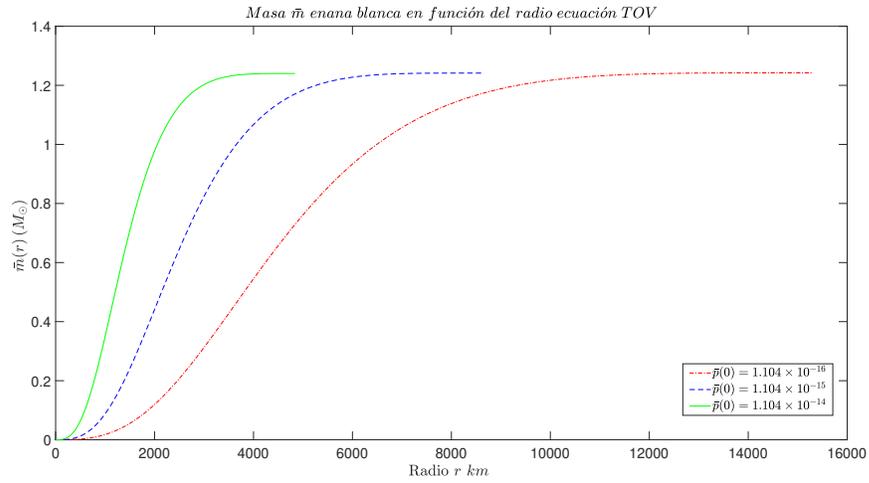


Figura 5.12: Masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen relativista con modelo en relatividad con ecuación de TOV.

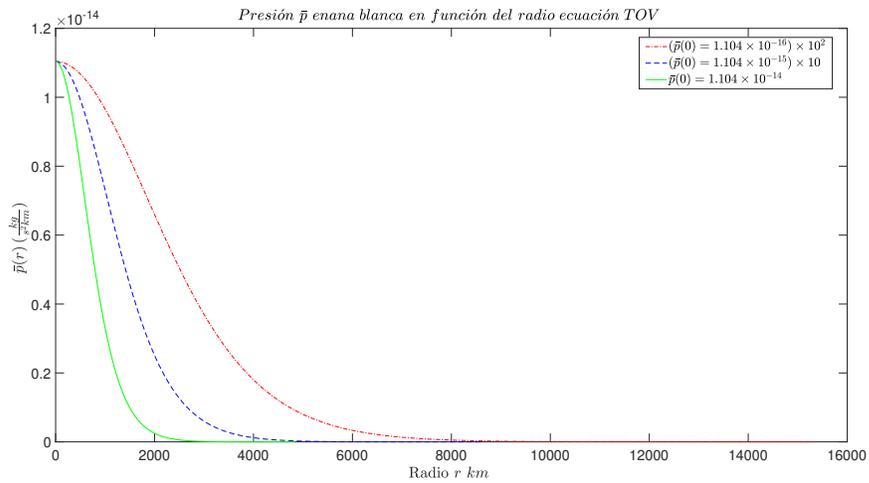


Figura 5.13: Presión $\bar{p}(r)$ (estandarizada) enana blanca en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen relativista con modelo en relatividad con ecuación de TOV.

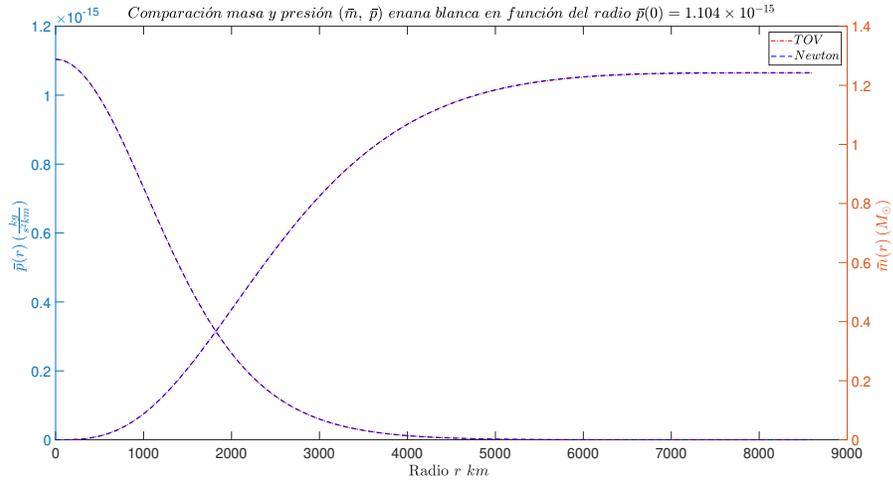


Figura 5.14: Contraste Masa $\bar{m}(r)$ y presión $\bar{p}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para presión central $\bar{p}(0) = 1,104 \times 10^{-15}$ en régimen relativista con modelo en relatividad con ecuación de *TOV*.

A diferencia del régimen no relativista, las diferencias son básicamente despreciables, siendo notorio sólo una disminución del radio final de la estrella para la solución de la ecuación de *TOV* con respecto a su contra parte con el modelo *Newtoniano*.

5.2.2. Estrellas de Neutrones

Resultados de solución numérica ecuación de *TOV* para estrellas de neutrones en los distintos regímenes de estudio

Régimen no relativista

P_0	\bar{P}_0	R (km)	M	Presión límite ($\bar{P}(R)$)
$1,603 \times 10^{33}$	1×10^{-7}	32,986	0,0962	$2,800 \times 10^{-19}$
$1,603 \times 10^{34}$	1×10^{-6}	25,991	0,1870	$2,099 \times 10^{-18}$
$1,603 \times 10^{35}$	1×10^{-5}	20,244	0,3507	$4,291 \times 10^{-19}$
$1,603 \times 10^{36}$	1×10^{-4}	15,362	0,6042	$3,716 \times 10^{-19}$
$1,603 \times 10^{37}$	1×10^{-3}	11,091	0,8767	$3,479 \times 10^{-14}$

Cuadro 5.7: Radios R (km) y masa M (M_\odot) para estrellas de neutrones en régimen no relativista con modelo en relatividad general con ecuación de *TOV*

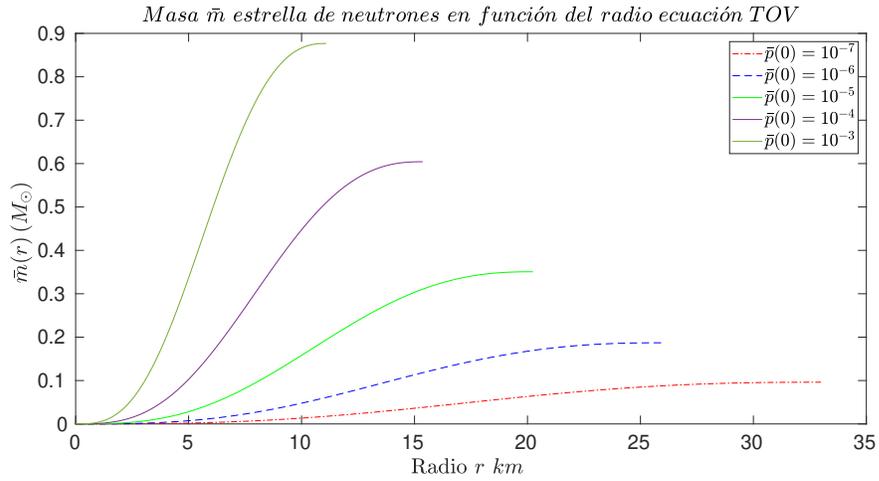


Figura 5.15: Masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen no relativista con modelo en relatividad con ecuación de *TOV*.

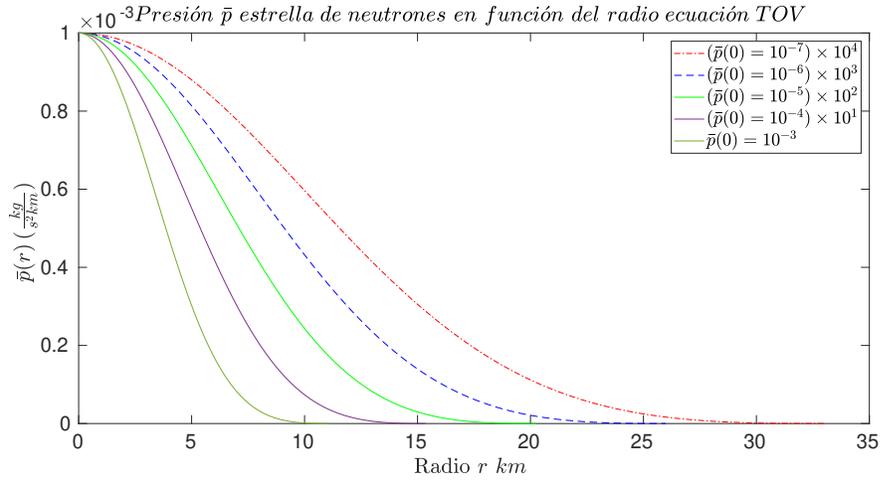


Figura 5.16: Presión $\bar{p}(r)$ (estandarizada) estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen no relativista con modelo en relatividad con ecuación de TOV.

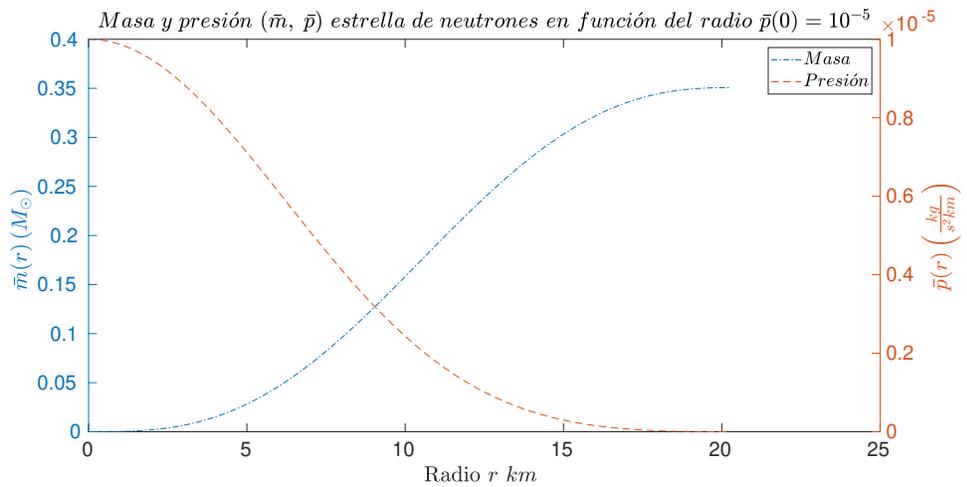


Figura 5.17: Contraste Masa $\bar{m}(r)$ y presión $\bar{p}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para presión central $\bar{p}(0) = 1,104 \times 10^{-15}$ en régimen no relativista con modelo en relatividad con ecuación de TOV.

Podemos notar como el comportamiento de la presión no tiene diferencias considerables respecto a su contra parte *Newtoniana*, sin embargo es evidente la disminución de las masas finales manteniendo similares radios para este caso, sin embargo esta menor acumulación de materia es consecuente con las observaciones ya que en el caso de ecuaciones clásicas se vio superado el límite físico de estos cuerpos.

Régimen relativista

P_0	\bar{P}_0	R (km)	M	Presión límite ($\bar{P}(R)$)
$1,60 \times 10^{37}$	1×10^{-3}	2,846	0,0586	$2,103 \times 10^{-13}$
$1,60 \times 10^{38}$	1×10^{-2}	2,166	0,0829	$7,611 \times 10^{-12}$
$1,60 \times 10^{39}$	1×10^{-1}	1,662	0,0935	$1,199 \times 10^{-11}$
$1,60 \times 10^{40}$	1×10^0	1,375	0,0886	$5,203 \times 10^{-11}$
$1,60 \times 10^{41}$	1×10^1	1,279	0,0821	$3,093 \times 10^{-11}$
$1,60 \times 10^{42}$	1×10^2	1,267	0,0797	$8,590 \times 10^{-12}$
$1,60 \times 10^{43}$	1×10^3	1,268	0,0793	$5,501 \times 10^{-12}$
$1,60 \times 10^{44}$	1×10^4	1,268	0,0793	$5,590 \times 10^{-11}$
$1,60 \times 10^{45}$	1×10^5	1,268	0,0792	$5,590 \times 10^{-11}$

Cuadro 5.8: Radios R (km) y masa M (M_\odot) para estrellas de neutrones en régimen relativista con modelo en relatividad general con ecuación de *TOV*

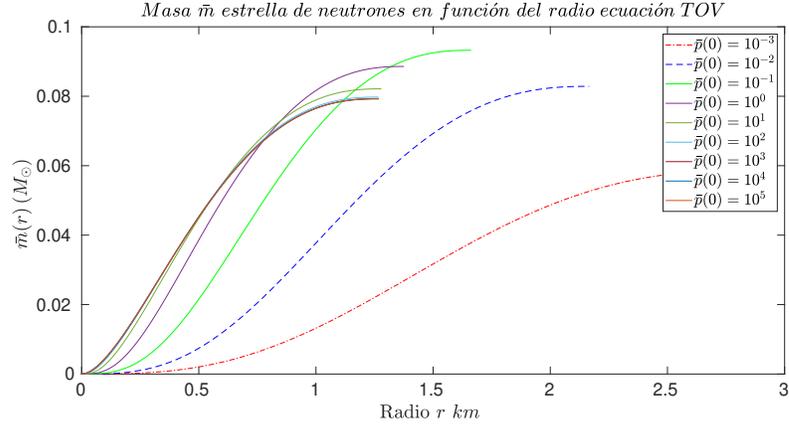


Figura 5.18: Masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen relativista con modelo en relatividad con ecuación de TOV.

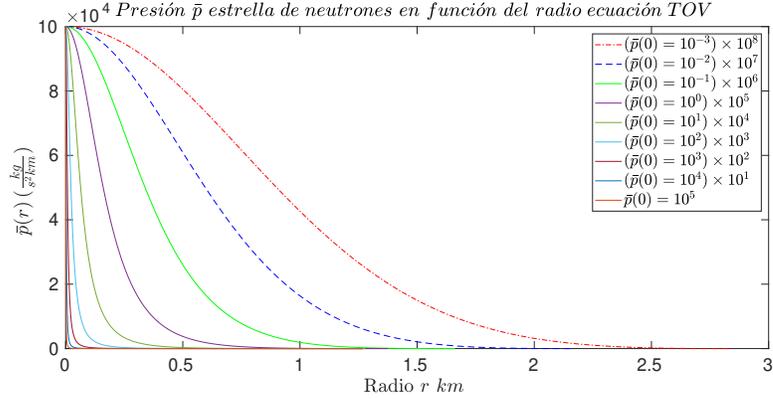


Figura 5.19: Presión $\bar{p}(r)$ (estandarizada) estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen relativista con modelo en relatividad con ecuación de TOV.

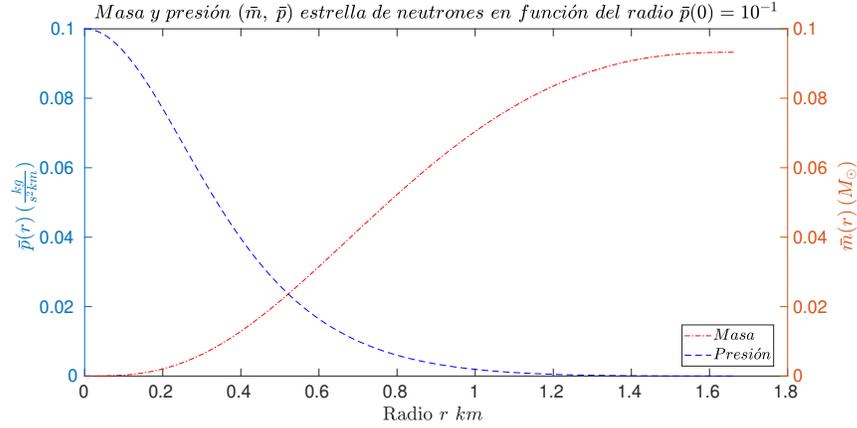


Figura 5.20: Contraste Masa $\bar{m}(r)$ y presión $\bar{p}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para presión central $\bar{p}(0) = 10^{-1}$ en régimen relativista con modelo en relatividad con ecuación de *TOV*.

Régimen general

P_0	\bar{P}_0	R (km)	$M(R)$ (M_\odot)	Presión límite ($\bar{P}(R)$)
$5,346 \times 10^{36}$	$1,0 \times 10^{-2}$	13,502	0,7206	$1,42 \times 10^{-13}$
$1,069 \times 10^{37}$	$2,0 \times 10^{-2}$	12,095	0,7602	$6,65 \times 10^{-14}$
$1,604 \times 10^{37}$	$3,0 \times 10^{-2}$	11,312	0,7741	$4,21 \times 10^{-14}$
$4,000 \times 10^{37}$	$7,5 \times 10^{-2}$	9,675	0,7772	$1,38 \times 10^{-13}$
$5,346 \times 10^{37}$	$1,0 \times 10^{-1}$	9,197	0,7699	$1,66 \times 10^{-12}$

Cuadro 5.9: Radios R (km) y masa M (M_\odot) para estrellas de neutrones en régimen mixto ajustado con modelo en relatividad general con ecuación de *TOV*

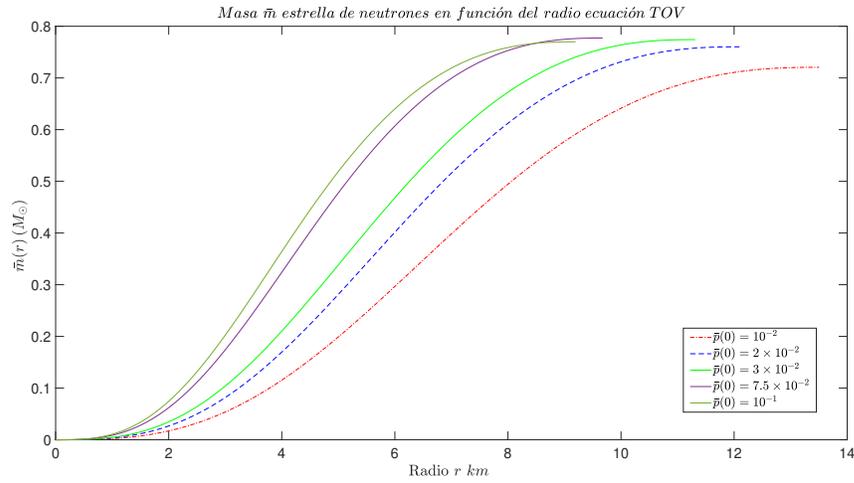


Figura 5.21: Masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen mixto ajustado con modelo en relatividad con ecuación de TOV.

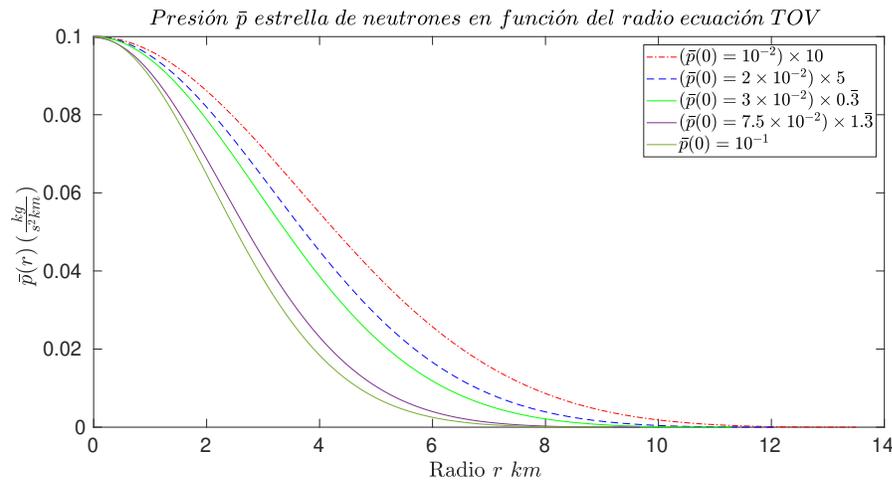


Figura 5.22: Presión $\bar{p}(r)$ (estandarizada) estrella de neutrones en función de la distancia radial r para escala de valores de presión central $\bar{p}(0)$ en régimen mixto ajustado con modelo en relatividad con ecuación de TOV.

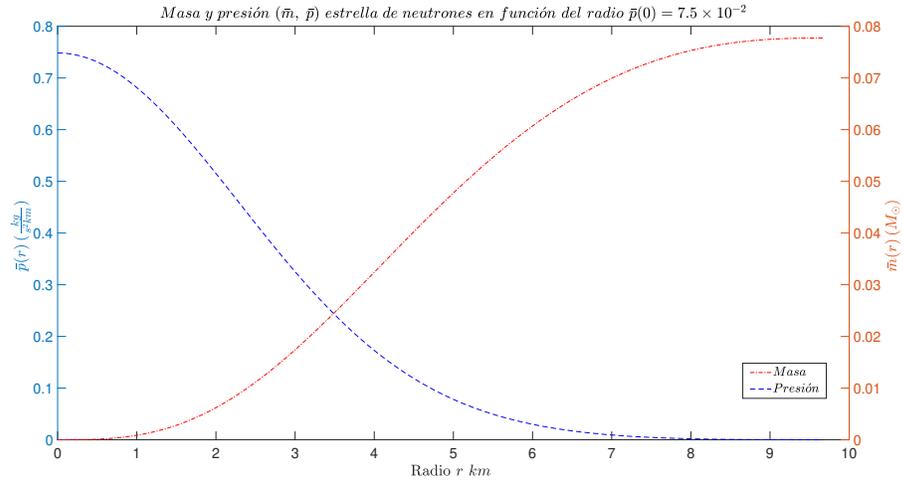


Figura 5.23: Contraste Masa $\bar{m}(r)$ y presión $\bar{p}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para presión central $\bar{p}(0) = 7,5 \times 10^{-2}$ en régimen mixto ajustado con modelo en relatividad con ecuación de *TOV*.

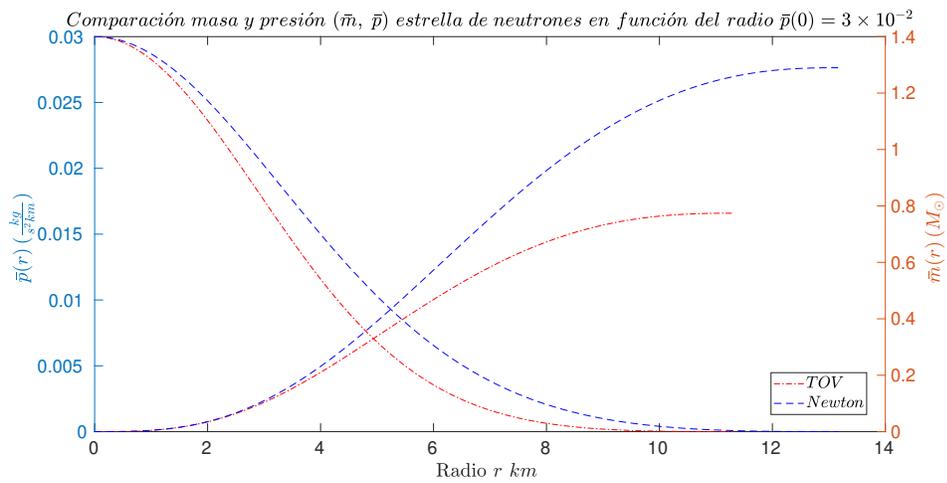


Figura 5.24: Masa $\bar{m}(r)$ y presión $\bar{p}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para presión central $\bar{p}(0) = 3 \times 10^{-2}$ en régimen mixto ajustado contrastando modelo en relatividad con ecuación de *TOV* y ecuación de *Newton*.

Como podemos evidenciar las disminuciones de masa y radios con respecto al modelo clásico son claras, así como una mayor pendiente en el rango medio para la caída de los valores de presión a través de la estructura interna de las estrellas de neutrones.

5.3. Modelo en relatividad general con constante cosmológica Λ

En los siguientes capítulos se estudiarán los efectos que tiene la constante cosmológica Λ de valor aproximado $\Lambda \approx 1,1056 \times 10^{-46} km^{-2}$, al ser incluida como un factor adicional en la ecuación de TOV como se vio en el capítulo (2) y específicamente como se indica en el término (3.0.4). Para analizar los efectos de esta inclusión se hizo un trabajo en distintas etapas, siendo la primera utilizar el factor que acompaña a Λ en el término de la ecuación de TOV correspondiente a los efectos relativistas como una contraposición a las consecuencias de la presión, posterior a esto se incluye también en el factor geométrico (denominador de la ecuación de TOV) y se visualizan sus efectos, finalmente se realizarán variaciones en el valor utilizado de Λ con respecto al observado, para identificar como afecta esto la estructura de las estrellas en estudio.

Es importante recalcar que todos los resultados aquí obtenidos como solución del sistema de ecuaciones correspondiente a cada régimen fue con la utilización del algoritmo numérico de *BS*, el cual presentó mejores tiempos y precisiones de detención bajo condiciones de contorno que el algoritmo de *Runge Kutta*, así se presenta en las siguientes páginas.

5.3.1. Λ como oposición a la presión

Como se comentó el primer estudio es entorno al contrapeso que significa la constante cosmológica frente a la presión central comportándose al interior de los cuerpos en el sentido de una suerte de *presión negativa*, o como se vio en la sección (1.3) como una presión de vacío, obteniendo los siguientes resultados para cada estrella y los distintos regímenes de presión central, sin generar cambios a los valores iniciales a fin de contrastar con los obtenidos sin la inclusión de Λ .

Enanas Blancas

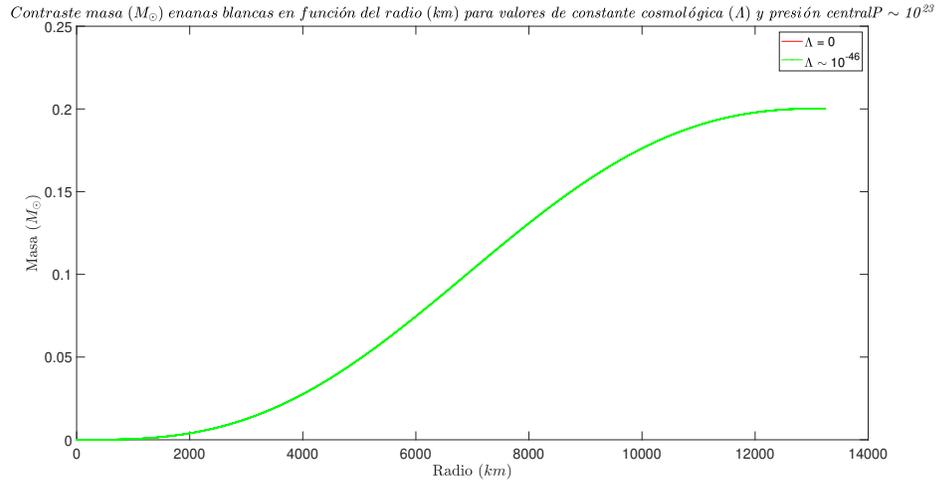


Figura 5.25: Contraste masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 10^{23}$ en régimen no relativista contrastando con constante cosmológica Λ .

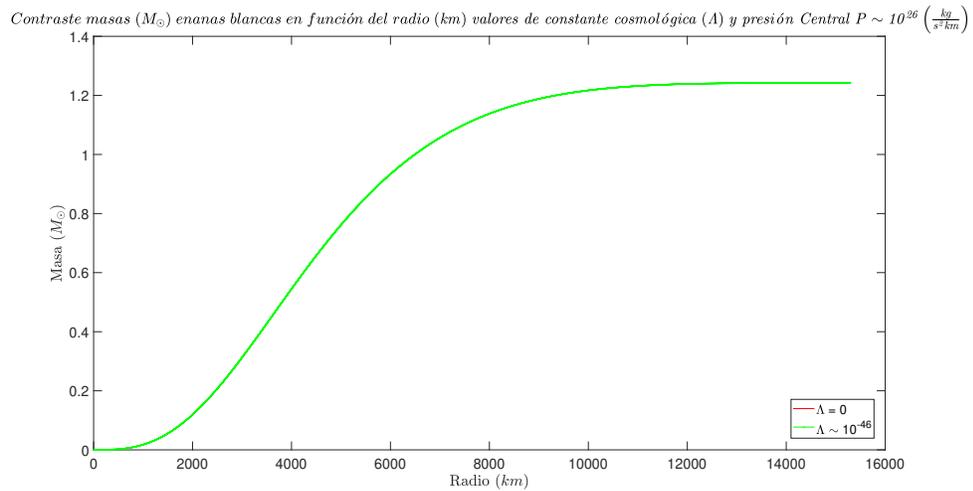


Figura 5.26: Contraste masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 10^{26}$ en régimen relativista contrastando con constante cosmológica Λ .

Como se puede evidenciar en las gráficas comparativas para valores correspondientes de presión central y los regímenes correspondientes de estado de la materia, no se puede encontrar diferencias admisibles que adviertan algún efecto por parte de la constante cosmológica Λ en la estructura interna, siendo en todos los puntos de solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales, las mismas masas y presiones, y por tanto los mismos radios finales de las enanas blancas en estudio, proceso que se repitió para diversos valores, sin encontrar diferencias.

Estrellas de Neutrones

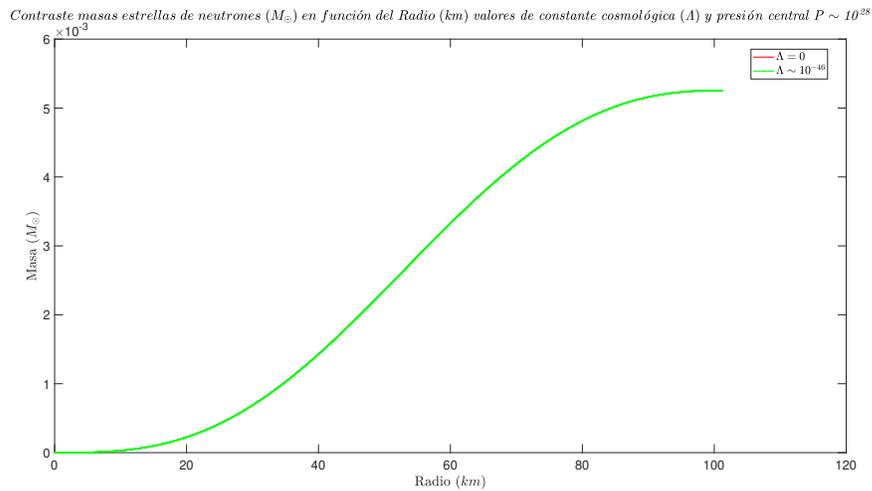


Figura 5.27: Contraste masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 10^{28}$ en régimen no relativista contrastando con constante cosmológica Λ .

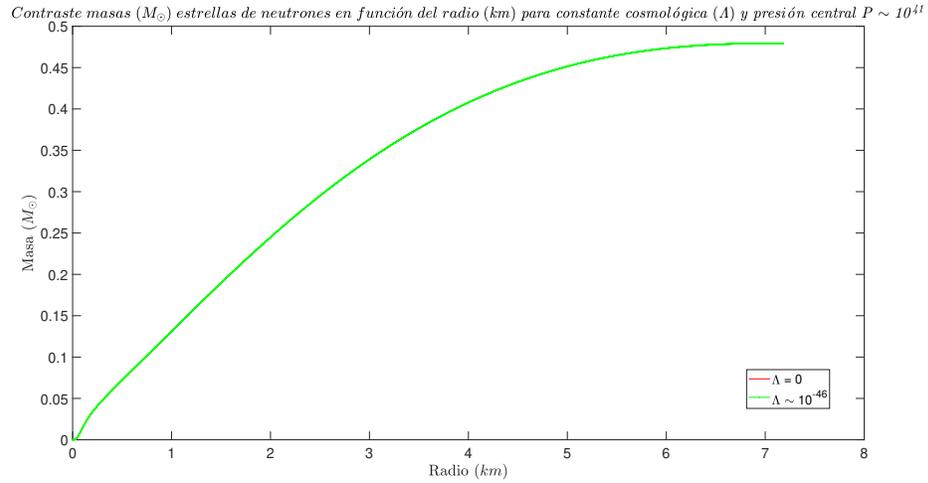


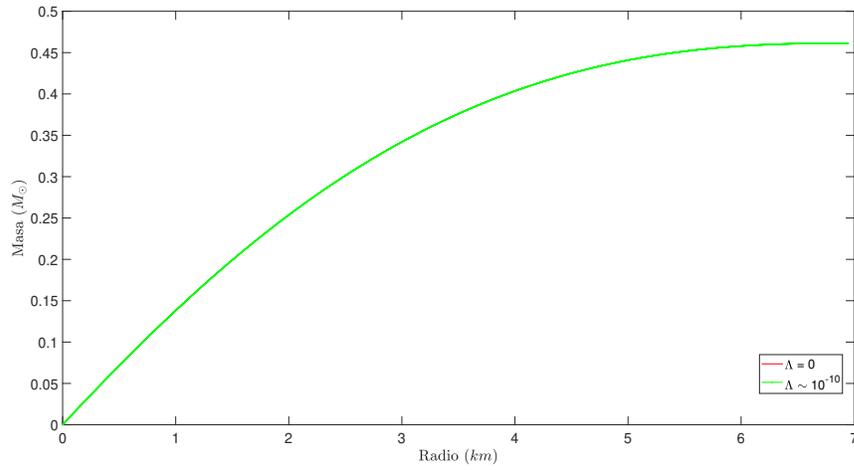
Figura 5.28: Contraste masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 10^{41}$ en régimen relativista contrastando con constante cosmológica Λ .

Se puede corroborar que al igual que el caso de enanas blancas, para las estrellas de neutrones tampoco existen diferencias entre los resultados obtenidos previamente para las ecuaciones de estructura y para aquellas con la adición de la constante cosmológica Λ .

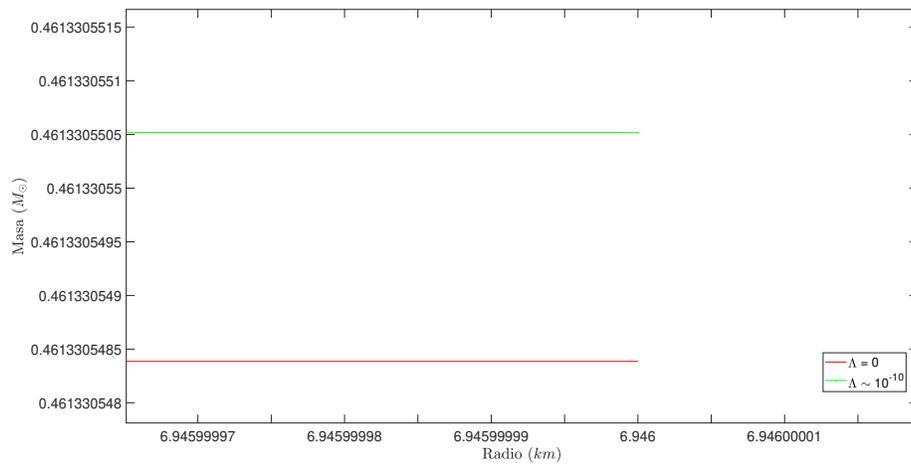
Variaciones de Constante Cosmológica

En vista de los resultados previos, surge la necesidad de explorar si la ausencia de efectos se debe a errores numéricos de cálculo, o lo que se pudo corroborar con el trabajo de esta sección, que la falta de diferencias es consecuencia del ínfimo valor de Λ respecto a los rangos de valores de presión, por tanto el procedimiento fue evaluar los efectos en la estructura de las estrellas de valores de constante cosmológica mayores que los medidos experimentalmente y que se encuentran registrados en la literatura especializada, con los cuales si fue posible notar diferencias que son presentadas a continuación, que además descartan la posibilidad de un error humano y validan la hipótesis de la nimiedad del valor de Λ .

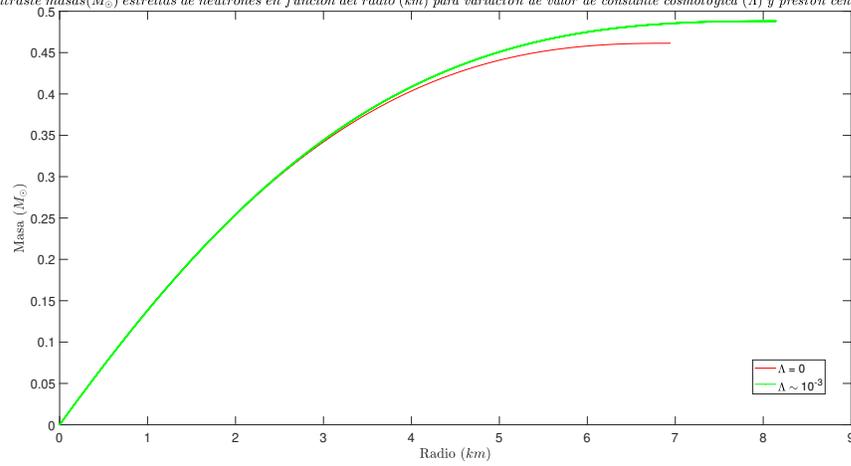
Contraste masas(M_{\odot}) estrellas de neutrones en función del radio (km) para variación de valor de constante cosmológica (Λ) y presión central $P \sim 10^{45}$



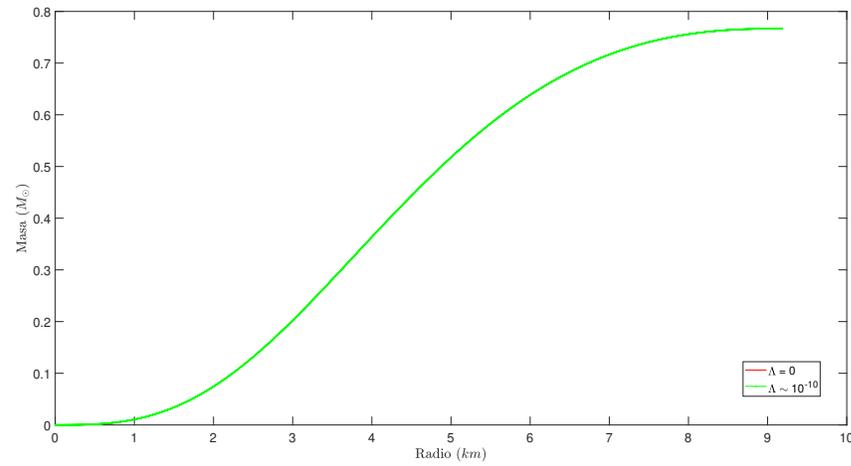
Contraste masas(M_{\odot}) estrellas de neutrones en función del radio (km) para variación de valor de constante cosmológica (Λ) y presión central $P \sim 10^{45}$



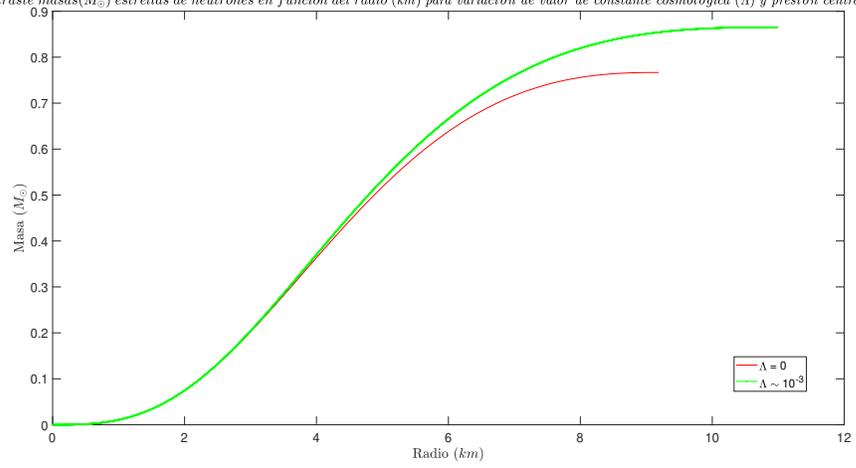
Contraste masas(M_{\odot}) estrellas de neutrones en función del radio (km) para variación de valor de constante cosmológica (Λ) y presión central $P \sim 10^{45}$



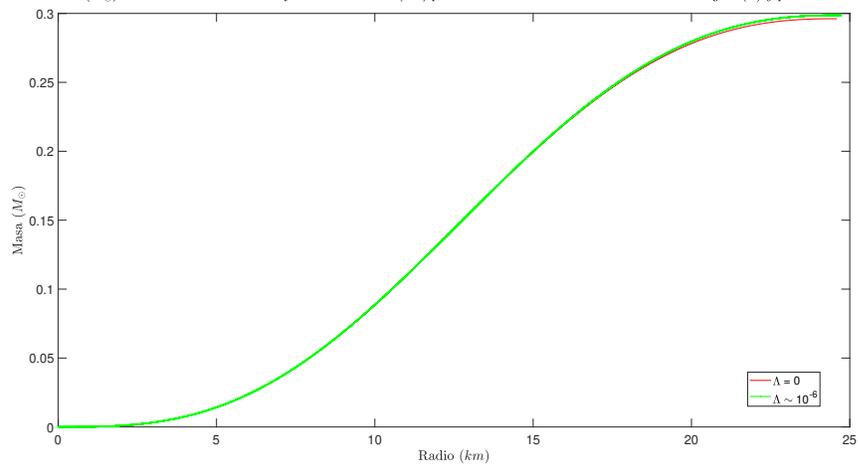
Contraste masas(M_{\odot}) estrellas de neutrones en función del radio (km) para variación de valor de constante cosmológica (Λ) y presión central $P \sim 10^{37}$

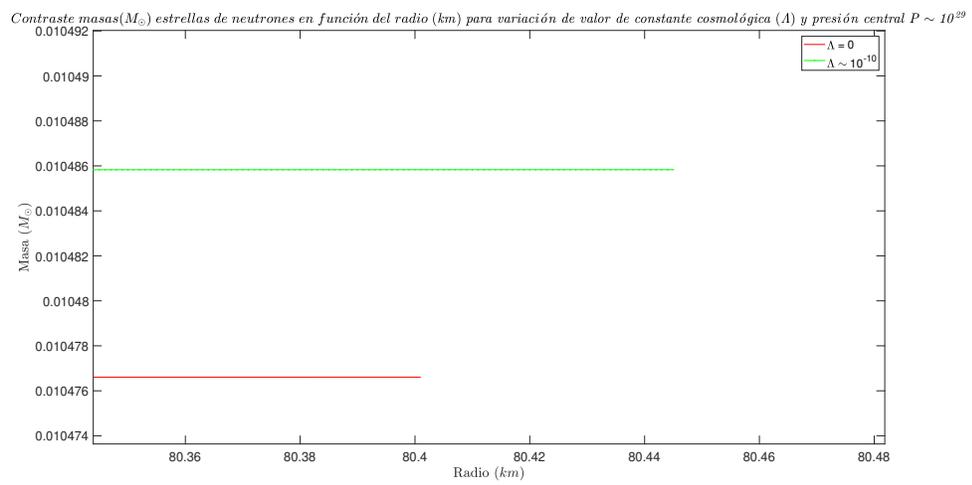
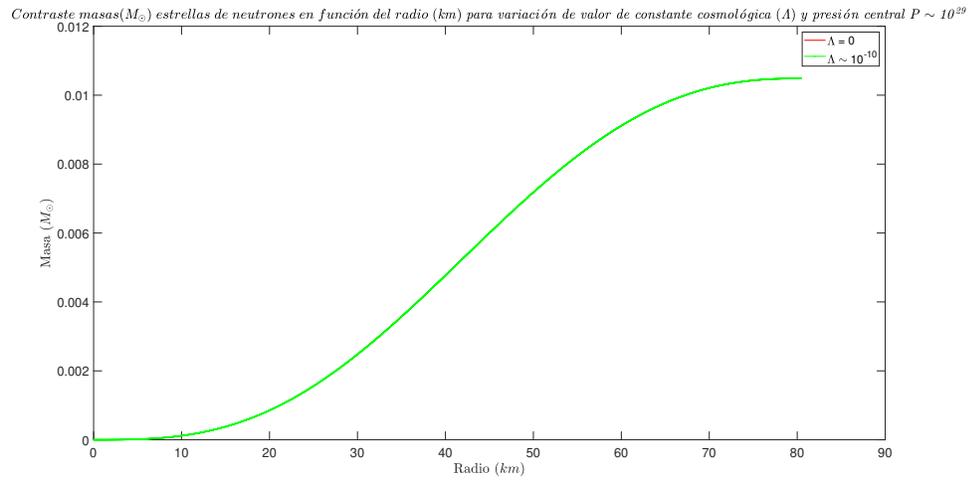


Contraste masas(M_{\odot}) estrellas de neutrones en función del radio (km) para variación de valor de constante cosmológica (Λ) y presión central $P \sim 10^{37}$



Contraste masas(M_{\odot}) estrellas de neutrones en función del radio (km) para variación de valor de constante cosmológica (Λ) y presión central $P \sim 10^{34}$





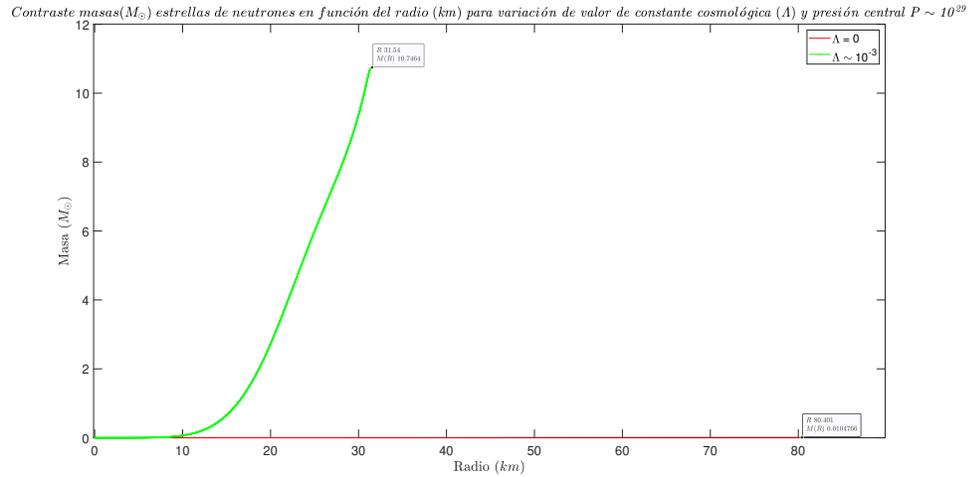


Figura 5.29: Contraste masa $\bar{m}(r)$ estrella de neutrones en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 10^{45}; p(0) = 10^{37}; p(0) = 10^{34}; p(0) = 10^{29}$ en régimen relativista ajustado contrastando con variaciones de valores de constante cosmológica Λ .

Como se puede notar en las gráficas previas inclusive para grandes valores en la variación de constante cosmológica Λ los efectos en la acumulación de masa total es bastante pequeño, casi despreciable, en el caso de presión central del orden de $\sim 10^{45}$ con una constante de gran tamaño con respecto a la original ($\Lambda \sim 10^{-3}$) podemos detectar diferencias considerables a simple vista en los valores observables de las estrellas de neutrones, conforme disminuye la presión inicial los efectos son percibidos a menores valores de Lambda, llegando inclusive a detectar un aumento explosivo de la masa total para escalas que previamente generaban ligeras variaciones.

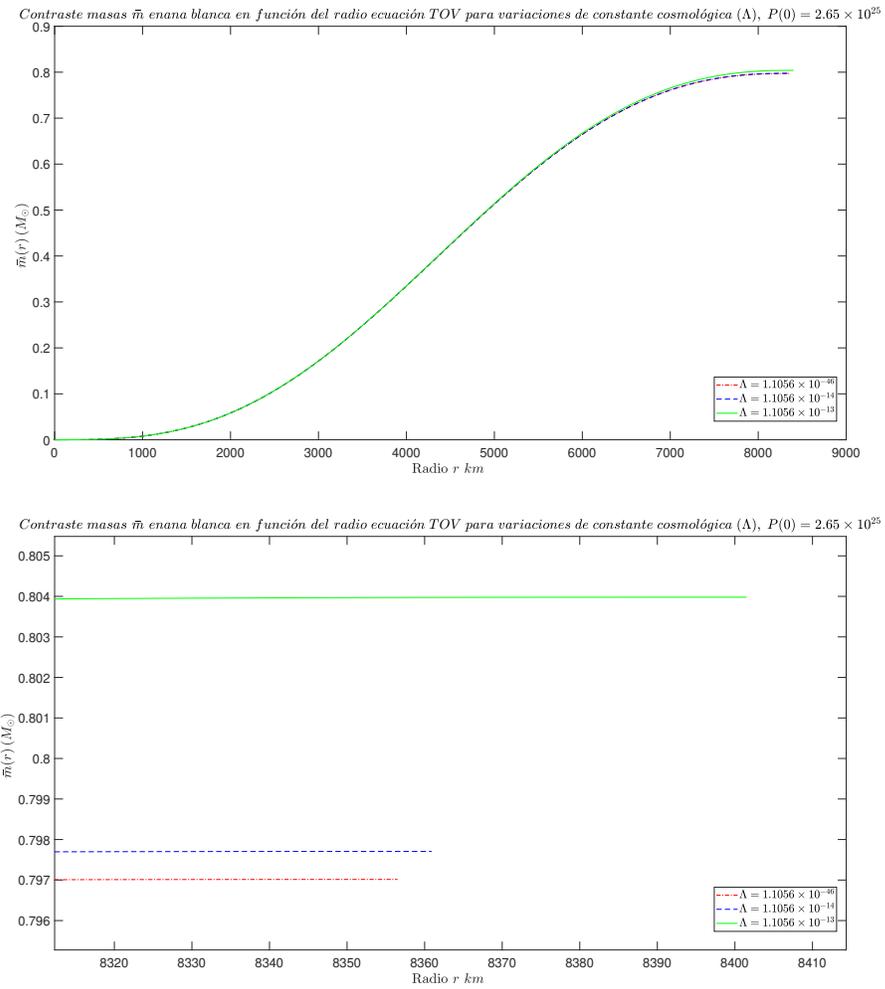


Figura 5.30: Contraste masa $\tilde{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 2,65 \times 10^{25}$ en régimen no relativista contrastando con variaciones de valores de constante cosmológica Λ .

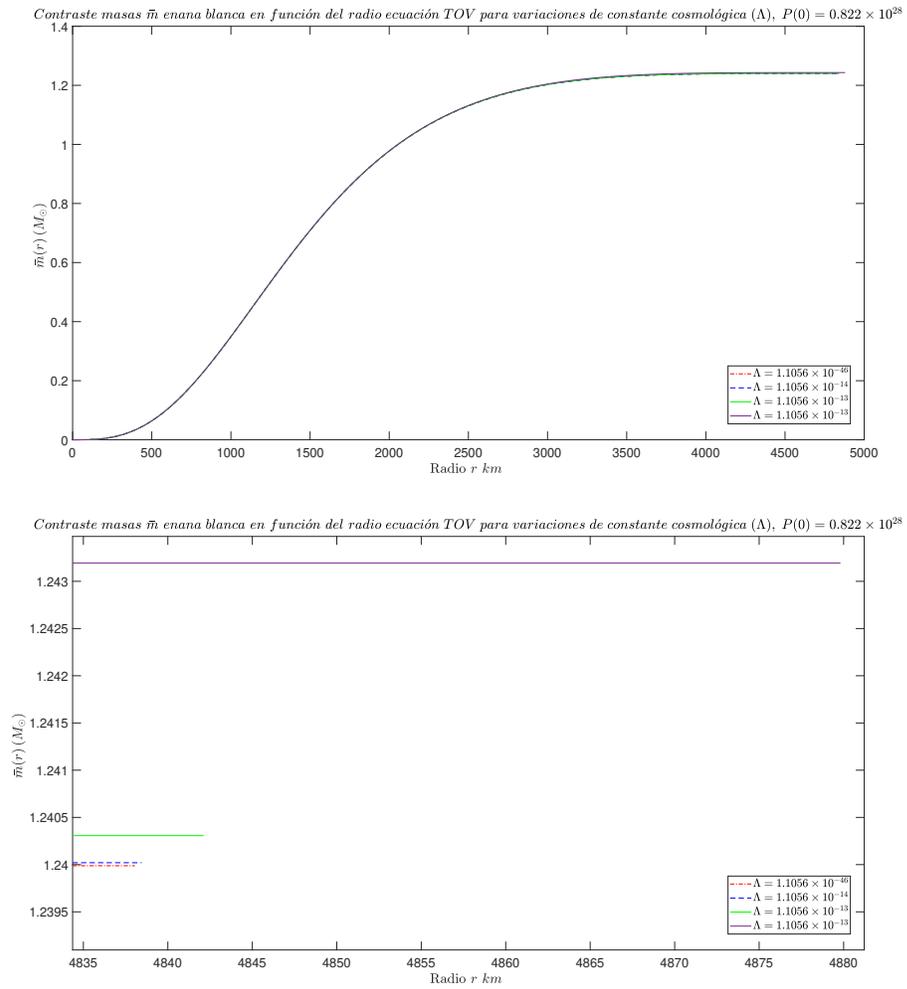


Figura 5.31: Contraste masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 0,822 \times 10^{28}$ en régimen relativista contrastando con variaciones de valores de constante cosmológica Λ .

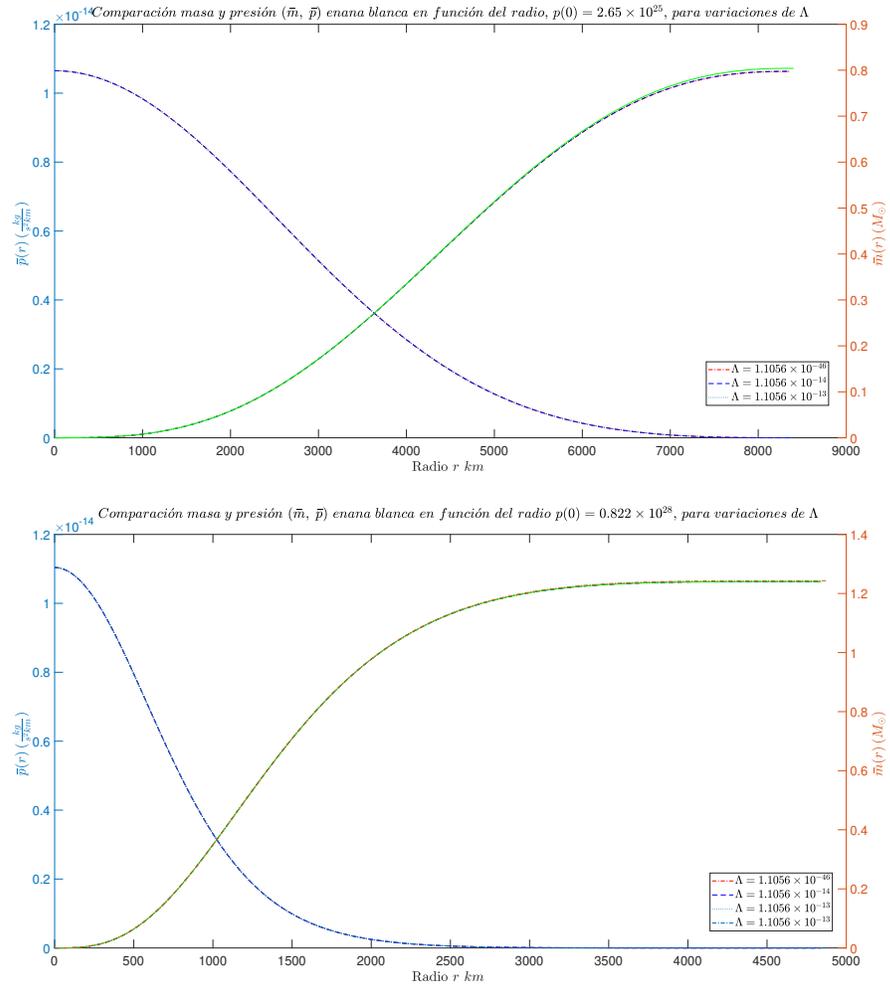


Figura 5.32: Contraste masa $\bar{m}(r)$ enana blanca en función de la distancia radial r para presión central $p(0) = 0,822 \times 10^{28}$ en régimen relativista contrastando con variaciones de valores de constante cosmológica Λ .

Como es de esperar para las enanas blancas, que presentan menores presiones centrales debido a su composición de materia, sufren los efectos debidos a la adhesión de la constante cosmológica variada en rangos mucho menores que en el caso de estrellas de neutrones, esto es consecuente con la literatura, la cual considera a Λ como una suerte de presión negativa, siendo un contrapeso a la

presión interna de la estrella aportando directamente en la acumulación de masa y en la velocidad de reducción del factor radial de presión, el cual es el encargado de activar la condición de borde establecida ($p(r) \leq 0$), lo que explica la disminución del radio final de los cuerpos en estudio.

Debido a que no son despreciables los efectos en la estructura de las estrellas por parte de las variaciones de Λ , podemos corroborar que no existen errores previos numéricos al momento de incluir la constante, si no que la falta de efectos en los primeros estudios es debido al diminuto valor con respecto al resto de las constantes fundamentales que tienen participación en los sistemas de ecuaciones que sirven de modelo para describir los cuerpos estelares de esta investigación, razón por la cual se analizarán efectos en los parámetros de las estrellas, entre ellos la compactificación $\zeta = \bar{m}(R)/R$.

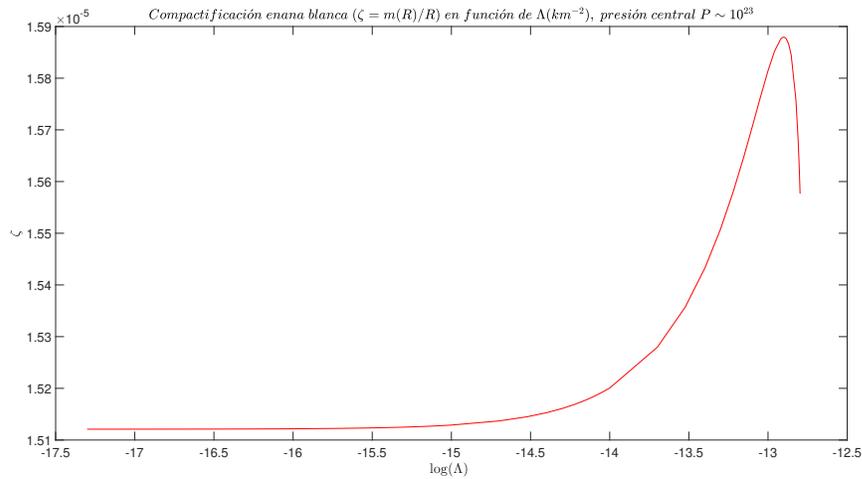


Figura 5.33: Compactificación (ζ) de enana blanca en función de la variación de valores de constante cosmológica Λ , para presión central $p(0) \sim 10^{23}$ en régimen no relativista

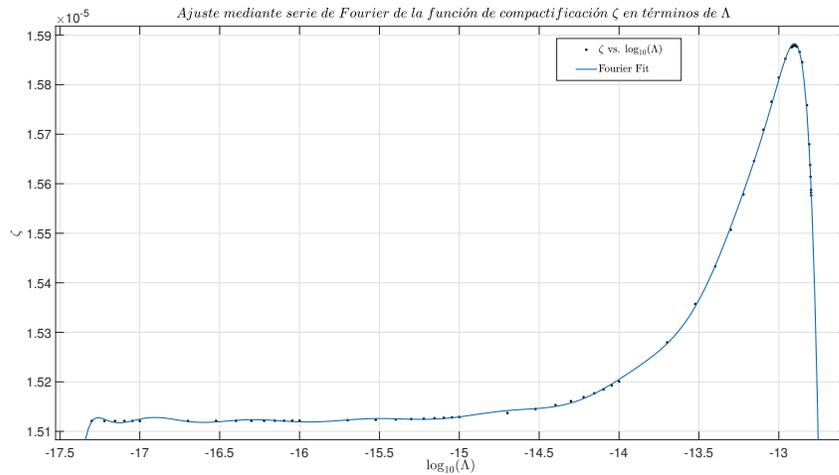


Figura 5.34: Contraste compactificación (ζ) de estrella de neutrones en función de la variaciones de valores de constante cosmológica Λ , relativista ajustado

es considerable el efecto que tiene la variación de Λ en el factor de compactificación en ambos casos y fue posible realizar un ajuste de la curva mediante *series de Fourier*, lo cual permitiría a futuro un estudio más acabado del comportamiento de este parámetro ζ en términos de la constante cosmológica. De similar modo se estudiaron otros contrastes entre modelos

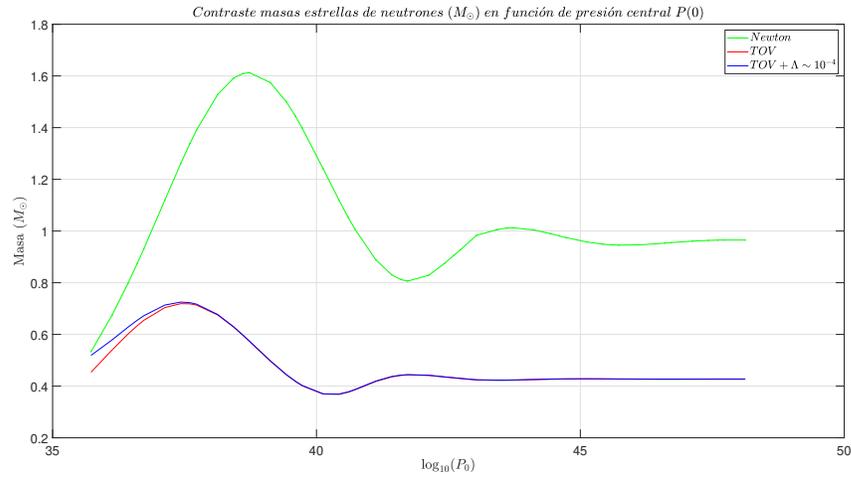


Figura 5.35: Contraste masas finales ($\bar{m}(R)$) de estrella de neutrones en función de las variaciones de presión central inicial con constante cosmológica variada $\Lambda \sim 10^{-4}$

se puede notar como se reducen las masas totales debido a la ecuación de *TOV* y como estas sufren un ligero aumento debido a la inclusión del factor de constante cosmológica variado $\Lambda \sim 10^{-4}$, todo esto en escalas de valores diversos de presión central inicial.

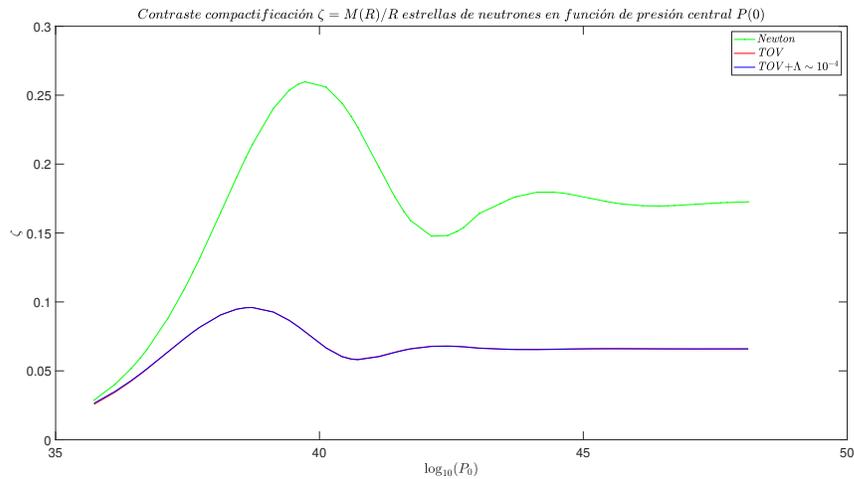


Figura 5.36: Contraste compactificación (ζ) de estrella de neutrones en función de las variaciones de presión central inicial con constante cosmológica variada $\Lambda \sim 10^{-4}$

en este caso se puede ver que el aporte ofrecido por Λ es bastante menor con respecto al aporte de masa generado, esto se responde debido a que no solo se genera un aumento de materia, sino que también en el tamaño de las estrellas en escalas similares.

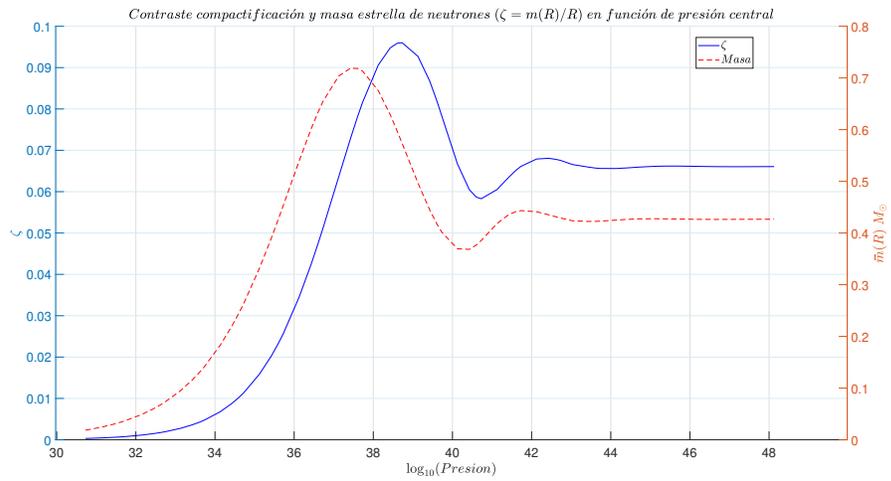


Figura 5.37: Contraste compactificación (ζ) y masa (M_{\odot}) de estrella de neutrones en función de las variaciones de presión central inicial

sin el ingreso de constante Λ en las ecuaciones de *TOV* existe un comportamiento similar entre la masa total y la compactificación con respecto a valores de presión inicial.

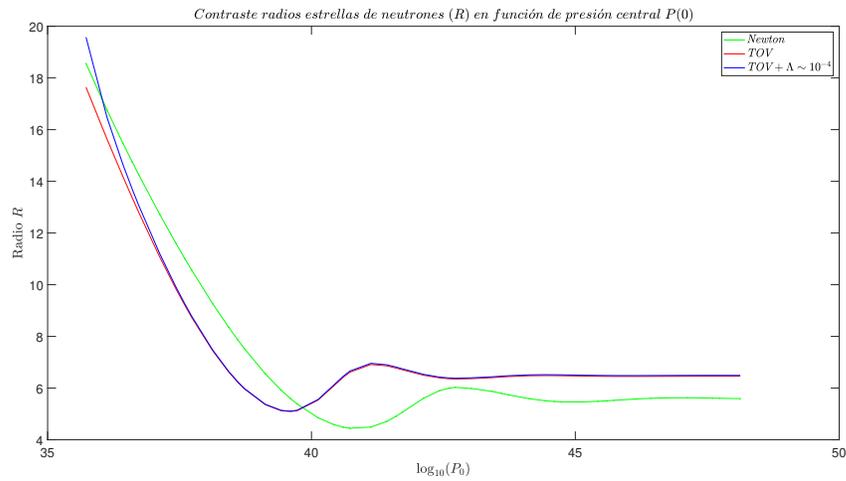


Figura 5.38: Contraste radio final (R) de estrella de neutrones en función de las variaciones de presión central inicial con constante cosmológica variada $\Lambda \sim 10^{-4}$

Los radios en estos casos presentan similitudes en valores bajos de presión inicial, para luego aumentar para el modelo con correcciones de relatividad general, para el caso regular y aquel con adhesión de constante cosmológica, generando esta última un leve aumento de este parámetro

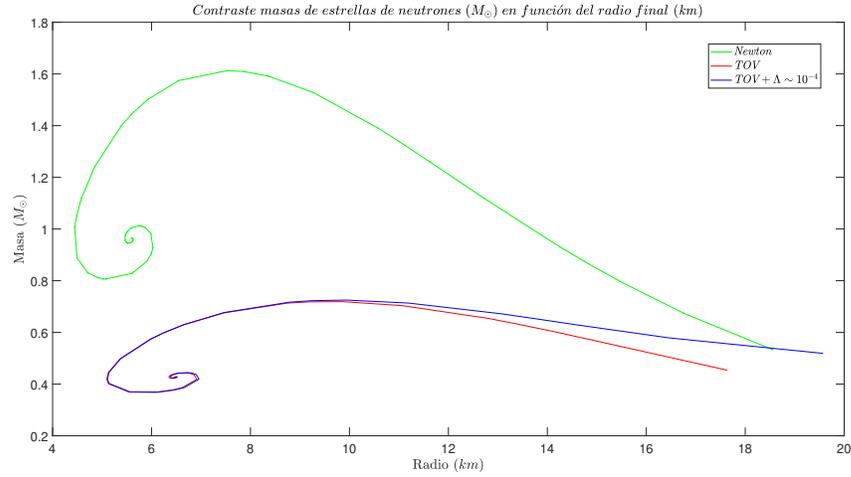


Figura 5.39: Contraste masa total ($\bar{m}(R)$) contra radio final (R) de estrella de neutrones en función de las variaciones de presión central inicial con constante cosmológica variada $\Lambda \sim 10^{-4}$

finalmente en esta línea de análisis podemos estudiar como se relacionan las masas con respecto al radio de las estrellas de neutrones al generar variaciones de presión central, en los casos de modelos *Newtonianos*, *relativista general* y a aquél con la adhesión de Λ , todos estos comportamientos son similares en forma, presentando variaciones considerables con el modelo clásico, pero de menor escala para la ajustada con constante cosmológica, pero no así despreciable.

Finalmente para complementar el estudio futuro se realiza un ajuste exponencial (mejor ajuste encontrado en un breve análisis de valores) a la masa y a la compactificación en función de valores iniciales de presión central.

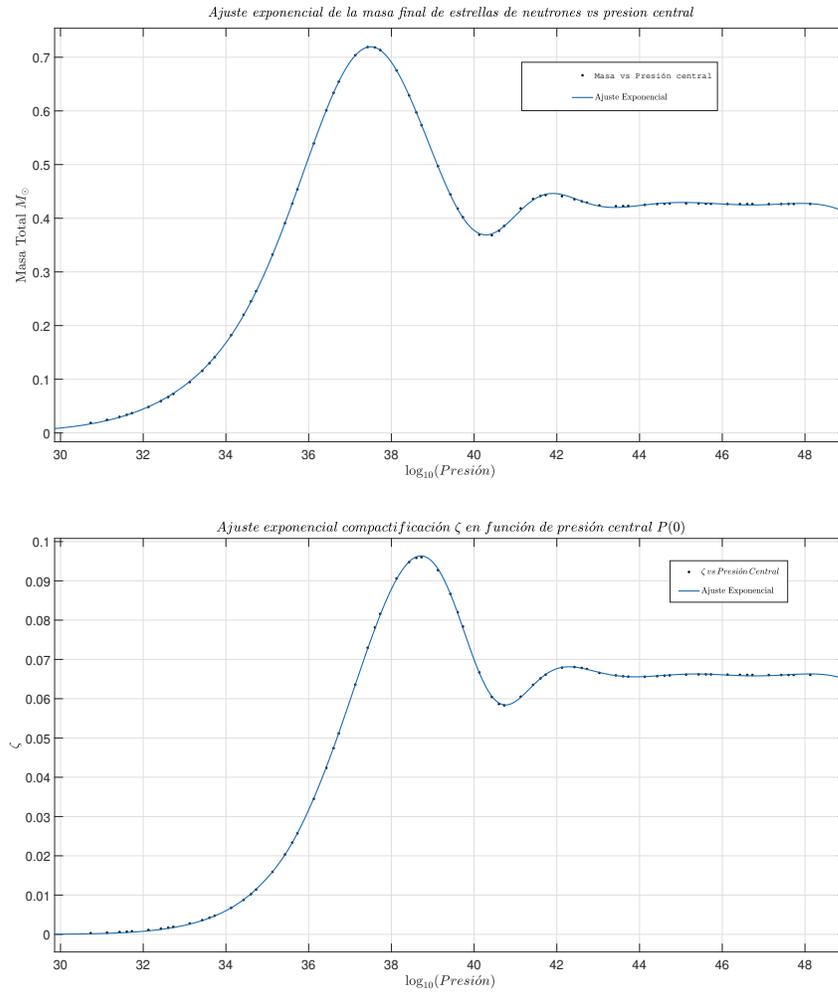


Figura 5.40: Ajuste masa final ($\bar{m}(R)$) y compactificación (ζ) de estrellas de neutrones en función de las variaciones de presión central inicial

Capítulo 6

Conclusiones

En la presente tesis se estudio el problema de la estabilidad de estrellas densas considerando las ecuaciones de equilibrio hidrostático de Tolman-Oppenheimer-Volkoff modificadas, incluyendo las contribuciones provenientes al solucionar las ecuaciones de campo de Einstein con constante cosmológica, junto con ecuaciones de estado, que describen la termodinámica asociada a las partículas y elementos que conforman la materia de éstas.

Para el presente estudio se contrastaron inicialmente los métodos de Runge-Kutta(RK) y Bulirsch-Stoer(BS), para soluciones numéricas de sistemas de ecuaciones acopladas en lenguajes MATLAB y FORTRAN, dado que no se conocen soluciones analíticas de ellas, seleccionando en base a la eficiencia finalmente en el segundo algoritmo *BS*, con el cual se obtuvieron las soluciones numéricas correspondientes a los problemas de valores iniciales en diferentes estados de materia, incluyendo también variaciones en los valores de constante cosmológica.

Para calibrar los métodos numéricos utilizados y asegurar así que los resultados obtenidos al incluir Λ en las ecuaciones se reprodujeron los resultados del artículo escrito por *Reddy y Silbar* [22], logrando un completo acuerdo con valores numéricos y curvas, las cuales se pueden revisar en el capítulo (5), secciones (5.1) y (5.2).

La variable que es esencial en los estudios numéricos y como condición fundamental para el PVI del sistema de ecuaciones es la presión central de la estrella, y dado que este valor no es

conocido a priori, fue necesario realizar numerosas pruebas de solución numérica considerando la relación (2.3.6), para escalas de valores de presión central inicial en el rango de $10^{23} - 10^{29}$ para enanas blancas y $10^{33} - 10^{46}$ para estrellas de neutrones (*con unidades de $kg * (s^2 km)^{-1}$*). Se constató en primera instancia que utilizando la constante cosmológica Λ de valor medido estimado $\Lambda \approx 1,1056 \times 10^{-46} km^{-2}$, ésta no genera efectos significativos en los parámetros principales de los modelos estudiados.

Lo anterior es válido para el caso de enanas blancas y estrellas de neutrones, sin embargo, fue posible notar que al usar valores diferentes de Λ al estimado, éstos tendrían un efecto nada despreciable en la estructura de los cuerpos celestes, y debido a que este cambio se ve en contrapunto directo al de la presión central inicial, esto también podría afectar estructuras de menor escala, no como se puede evidenciar actualmente, donde los efectos a menor escala percibidos se dan a nivel de galaxias, las cuales pueden contener desde cerca de 10 millones de estrellas diversas, entre ellas los pequeños cuerpos de estudio de este trabajo. Lo anterior se puede notar en como los parámetros de masa y radio de las estrellas de estudio difieren con respecto a las ecuaciones de *TOV* usuales y aquellas con inclusión de constante cosmológica, como se puede ver en las figuras (5.38,5.39,5.35) con variaciones cercanas al 10% en rangos de presión central bajos para una estrella de neutrones y en rangos mayores estas variaciones no superan el 1%, lo cual es esperable, considerando que la variable que se contrapone con el término de constante cosmológica en la ecuación *TOV* es justamente la presión central, por tanto a grandes valores ($\sim 10^{45} kg * (s^2 km)^{-1}$), los efectos de Λ dejan de ser considerable inclusive cuando ésta es utilizada en escalas distintas de las medidas experimentalmente.

Como trabajo futuro se propone realiza un estudio que permita encontrar soluciones analíticas de los sistemas acoplados utilizados en este trabajo, en base a la etapa final de éste donde se realizaron ajustes para las principales variables de las estrellas consideradas, en base a los resultados numéricos obtenidos con la rutina de *BS*, como se ve en las figuras (5.40,5.34), esbozando cual podría ser el comportamiento de las funciones que rigen estos parámetros. Otro camino posible de estudio es mejorar las estimaciones incluyendo en las ecuaciones los aportes a la densidad de energía debidos a otros componentes de la materia que conforman las estrellas en cada caso y sus interacciones mecánico cuánticas, escala en la cual la constante cosmológica podría presentar influencias.

Referencias

- [1] M. S. Turner, “The road to precision cosmology,” *arXiv preprint arXiv:2201.04741*, 2022.
- [2] J. Frieman, M. Turner, and D. Huterer, “Dark energy and the accelerating universe,” *arXiv preprint arXiv:0803.0982*, 2008.
- [3] P. Boonserm, T. Ngampitipan, A. Simpson, and M. Visser, “Innermost and outermost stable circular orbits in the presence of a positive cosmological constant,” *Phys. Rev. D*, vol. 101, p. 024050, Jan 2020.
- [4] J. B. Hartle, “Gravity: an introduction to einstein’s general relativity,” 2003.
- [5] A. S. Eddington, “45. the internal constitution of the stars,” 2013.
- [6] D. Koester and G. Chanmugam, “Physics of white dwarf stars,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 53, no. 7, p. 837, 1990.
- [7] D. Koester and V. Weidemann, “White dwarf constraints on mass loss rates and models of galactic evolution,” *Astronomy and Astrophysics*, vol. 81, pp. 145–151, 1980.
- [8] G. D. Schmidt and P. S. Smith, “A search for magnetic fields among da white dwarfs,” *The Astrophysical Journal*, vol. 448, p. 305, 1995.
- [9] D. Koester, “Evolution of surface abundances in cool white dwarfs,” in *IAU Colloq. 95: Second Conference on Faint Blue Stars*, pp. 329–339, 1987.
- [10] P. Haensel, A. Y. Potekhin, and D. G. Yakovlev, *Neutron stars 1: Equation of state and structure*, vol. 326. Springer Science & Business Media, 2007.

- [11] L. D. Landau, “On the theory of stars,” *Phys. Z. Sowjetunion*, vol. 1, no. 285, p. 152, 1932.
- [12] W. Baade and F. Zwicky, “Remarks on super-novae and cosmic rays,” *Physical Review*, vol. 46, no. 1, p. 76, 1934.
- [13] L. Landau, “Origin of stellar energy,” *Nature*, vol. 141, no. 3564, pp. 333–334, 1938.
- [14] G. Gamow, “Nuclear energy sources and stellar evolution,” *Physical Review*, vol. 53, no. 7, p. 595, 1938.
- [15] R. C. Tolman, “Static solutions of einstein’s field equations for spheres of fluid,” *Physical Review*, vol. 55, no. 4, p. 364, 1939.
- [16] J. Oppenheimer, “Volkoff, 1939 phys,” *Rev*, vol. 55, p. 374.
- [17] A. Einstein, “Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie,” in *Das Relativitätsprinzip*, pp. 81–124, Springer, 1923.
- [18] Z. Stuchlík, S. Hledík, and J. Novotný, “General relativistic polytropes with a repulsive cosmological constant,” *Physical Review D*, vol. 94, no. 10, p. 103513, 2016.
- [19] R. L. Burden, J. D. Faires, R. Iriarte Balderrama, *et al.*, *Análisis numérico*. 1996.
- [20] R. Bulirsch, J. Stoer, and J. Stoer, *Introduction to numerical analysis*. Springer, 1991.
- [21] M. Abramowicz, “Polytropes in n-dimensional spaces,” *Acta astronomica*, vol. 33, pp. 313–318, 1983.
- [22] R. R. Silbar and S. Reddy, “Neutron stars for undergraduates,” *American journal of physics*, vol. 72, no. 7, pp. 892–905, 2004.